Mémoire de Master
Equations de renouvellement implicite sur des arbres

Pierre BOUTAUD
M2 MdA, Université Paris-Saclay
encadré par Pascal MAILLARD

2017

Sommaire

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons aux équations de renouvellement sur des arbres pondérés, en utilisant la théorie du renouvellement implicite de Goldie [6] et en l'élargissant aux arbres pondérés comme traité par Jelenković et Olvera-Cravioto [8][9]. Nous discuterons des contraintes posées par certaines hypothèses et regarderons les résultats éventuels qui restent si ces hypothèses se font plus souples [11][12]. Nous verrons également les applications de ces résultats à la marche aléatoire branchante en utilisant des approches diverses (nous nous appuyerons sur [9],[13] et [6]).

Les équations qui nous intéressent ont la forme

$$R \overset{loi}{=} \psi((R_i)_i) \tag{1}$$

où R et ψ sont indépendants, les (R_i) sont des copies iid de R et pour tout i, notant e_i le vecteur ayant un 1 en i-ème coordonnée et des 0 partout ailleurs, nous avons $\psi(te_i) \sim M_i te_i$ $(|t| \to \infty)$ où les M_i sont aléatoires. Si ψ est une fonction de la variable réelle, nous noterons simplement M le terme linéaire de l'asymptotique. Dans un premier temps, nous étudierons le cas $R \overset{loi}{=} \psi(R)$ avant de généraliser.

Les résultats que nous allons énoncer visent à donner une asymptotique précise de la queue des solutions de ces équations de point fixe en loi. Si les variables aléatoires intervenant ont des moments d'ordre assez élevés, la queue de R sera de l'ordre de $t^{-\kappa}$ quand $t \to \infty$ (résultats de Goldie et de Jelenković et Olvera-Cravioto), tandis que dans un cadre plus large, un terme à variations lentes viendra se glisser dans l'asymptotique (résultats dûs à Kevei). Les résultats de Goldie et Jelenković et Olvera-Cravioto sont d'ailleurs très similaires, la seule différence étant dans la formulation des hypothèses dans le cadre multivarié, de la forme $\mathbb{E}[|(\psi(R)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa|] < \infty$. Les idées des preuves sont toutefois globalement les mêmes : trouver une équation de renouvellement vérifiée par des quantités d'intérêt pour les théorèmes et chercher une limite dans ces équations.

Tout d'abord se posera la question de l'existence d'une solution à cette équation de point fixe en loi et de l'unicité éventuelle de la loi solution. Une fois l'existence d'une solution démontrée, notre objectif sera d'étudier la queue de R en faisant quelques hypothèses sur ψ et plus particulièrement les moments de M. Nous détaillerons en particulier le cas $R \overset{loi}{=} Q + MR$ ainsi que le cas $R \overset{loi}{=} Q \bigvee MR$.

L'une des motivations principales pour l'étude de ces équations de point fixe (dans le cadre de ce mémoire) est d'obtenir des informations sur la queue des martingales de la marche aléatoire branchante. Définissons ici, quitte à le rappeler dans la partie dédiée, ce qu'est la marche aléatoire branchante. Démarrons avec une particule à une certaine position, cette particule va vivre pendant une durée aléatoire puis mourir en donnant naissance à un nombre aléatoire de particules (possiblement nul, possiblement infini) se dispersant aléatoirement et de manière iid autour de la position de la particule parente (c'est le branchement), chacune de ces particules se comporte alors de la même manière. Pour simplifier, nous oublions la durée de vie aléatoire et considérons qu'à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, il y a branchement pour toutes les particules vivantes et qu'elles ne peuvent brancher à aucun autre instant.
Pour une définition plus formelle, notons $\mathcal{U} = \bigcup_{n \geq 0} (\mathbb{N}^*)^n$ l'arbre d'Ulam (avec la convention $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$), un élément $u \in \mathcal{U}$ sera appelé individu et s'écrira $u = u_1 ... u_n$ avec $u_i \in \mathbb{N}^*$ et la longueur de u valant $|u| = n$. uv désigne la concaténation des mots u et v. Cet arbre est muni d'une relation d'ordre partiel : $u \leq v$ si u est un ancêtre de v, i-e $\exists w : \ v = uw$. La marche aléatoire branchante (MAB) est un processus aléatoire de particules $X = (X_u)_{u \in \mathcal{U}}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \bigcup \{\partial\}$ représentant la position des particules, où $X_u = \partial$ signifie qu'il n'y a pas de particule. La loi de la MAB est déterminée par sa loi de reproduction Ξ à support sur $(\mathbb{R} \bigcup \partial)^{\mathbb{N}^*}$. Notant $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...) \sim \Xi$, donnons nous des copies iid $(\xi_u)_{u \in \mathcal{U}}$ de la loi de ξ, nous avons alors

$$X_\emptyset = 0, \text{ et } \forall u \in \mathcal{U}, i \in \mathbb{N}^*, X_{ui} = X_u + \xi_{u,i}$$

Notons maintenant $\varphi(\theta) = \log \mathbb{E}[\sum_{i=1}^\infty e^{\theta X_i}]$, la martingale $W_n^{(\theta)} = \sum_{|u|=n} e^{\theta X_u - n\varphi(\theta)}$, converge p.s. et sa limite vérifie

$$W_\infty^{(\theta)} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\theta X_i - \varphi(\theta)} W_{\infty,i}^{(\theta)} \tag{2}$$

où les $W_{\infty,i}^{(\theta)}$ sont des copies iid de $W_\infty^{(\theta)}$.
Cette dernière équation est une équation de point fixe en loi du type que nous allons étudier au long de ce mémoire et comme nous le verrons dans le dernier chapitre, la connaissance du comportement de la queue de $W_\infty^{(\theta)}$ donne des informations sur le comportement asymptotique général de la MAB.

Nous conclurons par une comparaison entre les différentes approches possibles pour traiter le cas de la marche aléatoire branchante. En effet, en voyant l'allure de l'équation (2) et en voyant les résultats développés par Jelenković et Olvera-Cravioto nous avons une manière toute tracée de traiter le problème. Cependant, Liu [13] utilisait avant les résultats de Jelenković et Olvera-Cravioto une méthode de réduction de l'équation : en effet, plutôt que de traiter une équation de point fixe avec plusieurs variables iid, il réduisait cette équation à une équation équivalente du type traité par Goldie. Ceci nous donnera l'occasion de discuter des avantages et inconvénients des deux méthodes.

Chapitre 1

Préliminaires

Un concept qui reviendra beaucoup par la suite, car intervenant dans de nombreuses preuves sur le renouvellement, est la notion de loi non-arithmétique.

Définition 1.1 (Loi non-arithmétique). *Une loi μ est dite non-arithmétique si elle n'est pas supportée par un réseau. Plus précisément, il n'existe aucune mesure $\nu_\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n\lambda+c}$ telle que $\mu << \nu_\lambda$.*

Nous aurons aussi besoin de la notion de fonction directement Riemann-intégrable (voir Feller [5]) :

Définition 1.2. *Soit z une fonction de la variable réelle à valeurs réelles. Définissons pour tout $h > 0$, $\underline{m_n} = \min_{[(n-1)h,nh]} z$, $\overline{m_n} = \max_{[(n-1)h,nh]} z$, $\underline{\sigma} = h\sum_{n\in\mathbb{Z}} \underline{m_n}$ et $\overline{\sigma} = h\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{m_n}$. On dit que z est directement Riemann-intégrable si $\overline{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$ convergent pour tout $h > 0$ et si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un h tel que $\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \epsilon$.*

Cette définition intervient notamment dans ce que nous appelerons ici le théorème fondamental du renouvellement (voir [2], appelé *key renewal theorem* dans la littérature) :

Théorème 1.3. *[Théorème fondamental du renouvellement] Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire non-arithmétique admettant un premier moment fini et strictement positif. Soit $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction directement Riemann-intégrable. Alors*

$$M(t) := \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} K(t - S_n)\right] \to \frac{1}{\mathbb{E}[S_1]} \int_{\mathbb{R}} K(u)du. \tag{1.1}$$

Les preuves des théorèmes que nous allons énoncer utiliseront souvent ce théorème et ses conséquences. La nature de l'hypothèse de directe Riemann-intégrabilité nécessitera donc des considérations techniques sur les fonctions intervenant dans les preuves, demandant parfois l'usage de transformations régularisantes (voir ci-dessous) sur ces fonctions. Nous verrons par ailleurs, que dans certains cas il nous faudra un peu plus que des fonctions directement Riemann-intégrables pour obtenir des résultats satisfaisants : en effet, Kevei [12] observe qu'il est nécessaire de supposer z dRi et $z(x) = O(1/x)$ pour pouvoir conclure dans son cadre de travail.

Définition 1.4 (Transformation régularisante)**.** *Nous définissons une transformation permettant de régulariser une fonction f :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \check{f}(t) := \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)} f(u) du. \tag{1.2}$$

L'intérêt de cette transformation est de pouvoir appliquer le théorème fondamental du renouvellement. En effet les quantités d'intérêt avec lesquelles nous démarrons les preuves ne sont pas assez régulières pour appliquer le théorème 1.3 qui permet d'obtenir les asymptotiques recherchées. Or une fois régularisées via cette transformation, on aboutit souvent à des quantités suffisament régulières pour pouvoir conclure.

Chapitre 2

Théorie du renouvellement implicite

La plupart des résultats qui vont suivre sont dûs à Goldie [6].
Dans cette partie, nous considérons l'équation

$$R \stackrel{loi}{=} \psi(R) \tag{2.1}$$

où R et ψ sont indépendants et ψ est asymptotiquement linéaire.

La résolution de ces équations met en jeu des variables aléatoires dont les lois sont définies implicitement par des équations du même type et l'utilisation de mesure de renouvellement pour les lois associées s'avère essentiel dans les preuves.

2.1 Résultats généraux

2.1.1 Asymptotique des queues

Comme annoncé précédemment, levons la question de l'existence d'une solution.

Théorème 2.1. *[Principe de Letac] Donnons nous des copies iid $\psi_1, \psi_2, \ldots$ de ψ et définissons $Z_n(t) = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \ldots \circ \psi_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que ψ est à trajectoires continues. Si la limite $Z = \lim_{n\to\infty} Z_n(t)$ existe presque sûrement et ne dépend pas de t alors la loi de Z est l'unique loi vérifiant l'équation (2.1). De plus, la suite $W_n(t) := \psi_n \circ \ldots \circ \psi_1(t)$ admet pour loi limite cette unique loi, ceci pour tout t.*

Toutes les équations que nous considérons dans ce mémoire sont définies par une fonctionnelle à trajectoires continues. Il nous faudra juste s'assurer de la convergence presque sûre de la suite $Z_n(t)$ pour obtenir existence et/ou unicité des solutions.

Attaquons nous maintenant au vif du sujet. Nous voulons obtenir un équivalent sur la queue des variables aléatoires ayant la loi de R, point fixe de ψ. Pour ce faire, nous avons besoin d'hypothèses sur les moments de M qui est, rappelons le, défini par $\psi(t) \sim Mt$ $(|t| \to \infty)$ et d'un certain contrôle sur la queue de R.

Lemme 2.2. *[Moments de M, C.M.Goldie] Soit M une variable aléatoire telle qu'il existe un $\kappa > 0$ pour lequel on a :*

$$\mathbb{E}[|M|^\kappa] = 1$$
$$\mathbb{E}[|M|^\kappa \log^+ |M|] < \infty.$$

Supposons que la loi conditionnelle de $\log |M|$ *sachant que* $M \neq 0$ *est non-arithmétique. Alors*

$$-\infty \leq \mathbb{E}[\log |M|] < 0$$

et

$$m := \mathbb{E}[|M|^\kappa \log |M|] \in]0, \infty[.$$

Théorème 2.3. *[Equivalent de la queue de R, C.M.Goldie] Soit M satisfaisant les hypothèses du lemme* 2.2 *et soit R une variable aléatoire (pas forcément solution de l'équation* (2.1)*) indépendante de M. Plusieurs cas se présentent :*

1. *Si $M \geq 0$ p.s. et si*

$$\int_0^\infty |\mathbb{P}(R > t) - \mathbb{P}(MR > t)| t^{\kappa - 1} dt < \infty \tag{2.2}$$

ou, respectivement,

$$\int_0^\infty |\mathbb{P}(R < -t) - \mathbb{P}(MR < -t)| t^{\kappa - 1} dt < \infty \tag{2.3}$$

alors

$$\mathbb{P}(R > t) \sim C_+ t^{-\kappa} (t \to \infty), \tag{2.4}$$

respectivement

$$\mathbb{P}(R < -t) \sim C_- t^{-\kappa} (t \to \infty), \tag{2.5}$$

où les constantes C_+ et C_- sont données par

$$C_+ = \frac{1}{m} \int_0^\infty (\mathbb{P}(R > t) - \mathbb{P}(MR > t)) t^{\kappa - 1} dt, \tag{2.6}$$
$$C_- = \frac{1}{m} \int_0^\infty (\mathbb{P}(R < -t) - \mathbb{P}(MR < -t)) t^{\kappa - 1} dt. \tag{2.7}$$

2. *Si $\mathbb{P}(M < 0) > 0$ et si les hypothèses* (2.2) *et* (2.3) *tiennent alors* (2.4) *et* (2.5) *sont vérifiées avec*

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2m} \int_0^\infty (\mathbb{P}(|R| > t) - \mathbb{P}(|MR| > t)) t^{\kappa - 1} dt. \tag{2.8}$$

Remarque. *Si* (2.2) *et* (2.3) *sont satisfaites, peu importe le cas, on aura alors*

$$C := C_+ + C_- = \frac{1}{m} \int_0^\infty (\mathbb{P}(|R| > t) - \mathbb{P}(|MR| > t)) t^{\kappa - 1} dt. \tag{2.9}$$

Remarque. *Dans le cadre du théorème, si $\mathbb{E}[|R|^\kappa] < \infty$, $C = \frac{1}{\kappa m}(\mathbb{E}[|R|^\kappa] - \mathbb{E}[|MR|^\kappa]) = 0$ par indépendance de M et R. On aura donc un petit o plutôt qu'un équivalent sur la queue de $|R|$, ce qui est moins intéressant. Il faut donc essayer de calibrer M et κ pour que $\mathbb{E}[|R|^\kappa] = \infty$.*

2.1.2 Queue des solutions

Il est important de remarquer que le théorème 2.3 ne suppose pas que R est solution d'une équation de point fixe. En fait c'est un résultat qui pourra être utile dans un cadre bien plus large que celui pris ici. Le corollaire suivant vise à préciser les conditions et les constantes obtenues lorsque R vérifie l'équation (2.1).

Corollaire 2.4 (C.M.Goldie)**.** *Supposons maintenant que R est solution de* (2.1)*. Supposons aussi que M vérifie les hypothèses du lemme* 2.2 *et est tel que R est indépendant de* (ψ, M)*. On peut alors remplacer les conditions* (2.2) *et* (2.3) *respectivement par*

$$\mathbb{E}[|(\psi(R)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa|] < \infty, \tag{2.10}$$

$$\mathbb{E}[|(\psi(R)^-)^\kappa - ((MR)^-)^\kappa|] < \infty, \tag{2.11}$$

et les formules (2.6), (2.7) *et* (2.8) *respectivement par*

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m}\mathbb{E}[(\psi(R)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa], \tag{2.12}$$

$$C_- = \frac{1}{\kappa m}\mathbb{E}[(\psi(R)^-)^\kappa - ((MR)^-)^\kappa], \tag{2.13}$$

$$C_+ = C_- = \frac{1}{\kappa m}\mathbb{E}[|\psi(R)|^\kappa - |MR|^\kappa]. \tag{2.14}$$

La preuve de ce corollaire découle de manière assez immédiate du précédent théorème en explicitant le fait que R est solution de l'équation de point fixe (2.1).

2.2 Application à des équations particulières

Il existe une multitude d'équations de point fixe en loi définies par une application asymptotiquement linéaire et pour lesquelles les théorèmes généraux pourront s'appliquer. Cependant, nous nous concentrerons seulement sur deux cas que nous pourrons appliquer à la marche aléatoire branchante.

2.2.1 Cas affine

On considère ici le cas où $\psi(t) = Q + Mt$, $t \in \mathbb{R}$ où Q et M sont des variables aléatoires réelles.
L'équation de point fixe est donc

$$R \overset{loi}{=} Q + MR. \tag{2.15}$$

Les propriétés de cette équation sont décrites en détails dans le livre de Buraczewski, Damek et Mikosch [3].

Considérons $(Q_k, M_k)_{k\geq 1}$ des copies iid de (Q, M). Notant $\Pi_n = M_1 ... M_n$, on observe que $R \overset{loi}{=} \sum_{k\geq 1} Q_k \Pi_{k-1}$ par itérations successives de l'équation de point fixe, sous réserve que la somme converge.

En appliquant les résultats généraux de la théorie du renouvellement implicite, nous sommes en mesure de préciser l'asymptotique des queues des solutions de notre équation de point fixe en loi.

Théorème 2.5 (C.M.Goldie)**.** *Soient Q et M des variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé. Supposons que M vérifie les hypothèses du lemme* 2.2 *et que*

$$\mathbb{E}[|Q|^\kappa] < \infty.$$

Alors il existe une unique loi pour R solution de (2.15). *Cette loi vérifie* (2.4) *et* (2.5).
Si $M \geq 0$ p.s. alors

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m} \mathbb{E}\left[((Q+MR)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa\right], \tag{2.16}$$

$$C_- = \frac{1}{\kappa m} \mathbb{E}\left[((Q+MR)^-)^\kappa - ((MR)^-)^\kappa\right], \tag{2.17}$$

tandis que dans l'autre cas,

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2\kappa m} \mathbb{E}[|Q+MR|^\kappa - |MR|^\kappa]. \tag{2.18}$$

De plus, $C_+ + C_- > 0$ si et seulement si

$$\forall c \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Q = (1-M)c) < 1 \tag{2.19}$$

Pour l'existence et l'unicité de la loi solution, c'est une conséquence du principe de Letac. En effet, pour reprendre les notations du théorème 2.1, nous avons $Z = \sum_{k\geq 1} Q_k \Pi_{k-1}$ qui ne dépend pas de t et ψ est clairement à trajectoires continues. Pour prouver la dernière assertion, nous aurons besoin d'un résultat de Grincevičius :

Proposition 2.6 (Grincevičius)**.** *Soient $(Q_n, M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des copies iid de (Q, M). Posons*

$$\Pi_j := \prod_{k=1}^{j} M_k, \quad R_n := \sum_{k=1}^{n} \Pi_{k-1} Q_k,$$

$$\Pi_{j,n} := \prod_{k=j+1}^{n} M_k, \quad R_{j,n} := \sum_{k=j+1}^{n} \Pi_{j,k-1} Q_k,$$

de sorte que $R_n = R_j + \Pi_j R_{j,n}$. Alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\max_{j\in[\![1,n]\!]} \left(R_j + \Pi_j \operatorname{med}(R_{j,n} + \Pi_{j,n} y)\right) > x\right) \leq 2\mathbb{P}(R_n + \Pi_n y > x). \tag{2.20}$$

Il est intéressant de noter que sous les hypothèses du principe de Letac, la suite R_n converge presque sûrement vers une variable $\tilde{R}$ de même loi que R et, de la même manière, les $R_{j,n}$ convergent presque sûrement vers une variable de même loi que R. Ainsi on peut déduire de la proposition 2.6 que

$$\forall x \geq 0, \mathbb{P}\left(\sup_{j\in\mathbb{N}}(R_j + \Pi_j \operatorname{med} R) > x\right) \leq 2\mathbb{P}(R > x), \tag{2.21}$$

et

$$\forall x \geq 0, \mathbb{P}\left(\sup_{j\in\mathbb{N}}|R_j + \Pi_j \operatorname{med} R| > x\right) \leq 2\mathbb{P}(R > x). \tag{2.22}$$

Ces inégalités seront utiles dans les preuves.

Il est possible d'obtenir des bornes précises sur les constantes C_+, C_- et $C_+ + C_-$ grâce au théorème 2.5. Pour plus d'informations à ce sujet, consulter [6].

2.2.2 Cas extrémal

Nous considérons maintenant le cas où $\psi(t) = \max\{Q, Mt\}$ où Q et M sont des variables aléatoires, $M \geq 0$ p.s.. L'équation de point fixe étudiée est donc

$$R \overset{loi}{=} Q \vee MR, \tag{2.23}$$

où $\vee$ dénote le maximum.

A noter que spécifier $Q = 1$ donne des résultats sur le maximum d'une marche aléatoire.

Si nous reprenons les notations du théorème 2.1 et que nous posons $\Pi_k := M_1...M_k$ où les (M_k, Q_k) sont des copies iid de (M, Q), nous avons $Z_n(t) = \max(t\Pi_n, \bigvee_{k=1}^n Q_k\Pi_{k-1})$. Nous avons donc en appliquant le principe de Letac le résultat suivant :

Proposition 2.7 (Existence et unicité de la solution)**.** *Si $M \geq 0$ p.s., $\mathbb{E}[\log(M)] \in [-\infty, 0[$ et $\mathbb{E}[\log_+(Q)] < \infty$ alors $\tilde{R} = \bigvee_{k=1}^\infty Q_k\Pi_{k-1}$ est fini p.s. et sa loi est l'unique solution de (2.23).*

Théorème 2.8 (C.M.Goldie)**.** *Supposons que $M \geq 0$ p.s. et vérifie les conditions du lemme 2.2 et que $\mathbb{E}[(Q_+)^\kappa] < \infty$. Alors il existe une unique loi pour R solution de (2.23) et elle vérifie*

$$\mathbb{P}(R > t) \sim C_+ t^{-\kappa} (t \to \infty), \tag{2.24}$$

où C_+ est donné par

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m}\mathbb{E}\left[(Q_+ \vee MR_+)^\kappa - (MR_+)^\kappa\right]. \tag{2.25}$$

De plus $C_+ > 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(Q > 0) > 0$.

2.3 Relaxation des hypothèses et ce qu'il en résulte

Nous exposons ici des résultats dûs à Kevei [11][12] qui visent à relaxer certaines des hypothèses faites par Goldie sur les moments de M dans le cas affine (à noter qu'il est aussi possible d'obtenir des asymptotiques en relachant certaines conditions sur Q, ce que nous ne ferrons pas ici). Nous verrons que les résultats sont alors légèrement modifiés, mais qu'il est toujours possible d'obtenir des expressions précises pour les constantes qui apparaissent dans l'asymptotique des queues. Plus précisément, au lieu d'obtenir des queues qui obéissent à des lois de puissances, un terme multiplicatif à variations lentes se glissera dans l'asymptotique.

Dans toute cette section, il sera supposé que $M \geq 0$ p.s..

2.3.1 Un premier cadre

Nous allons nous donner deux cadres de travail différents, déterminés par les valeurs de $\mathbb{E}[M^\kappa]$.

Nous noterons $\mathbb{P}_\kappa$ pour $\kappa > 0$, la probabilité définie par

$$\mathbb{P}_\kappa(\log(M) \in C) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\log(M)\in C} M^\kappa\right], \tag{2.26}$$

probabilité qui intervient déjà comme changement de mesure dans les preuves de Goldie [6]. Nous ferrons ici l'hypothèse selon laquelle $\mathbb{E}[M^\kappa] = 1$, afin que $\mathbb{P}_\kappa$ soit bien une probabilité.
Si F désignait la fonction de répartition de $\log(M)$ sous $\mathbb{P}$, nous désignerons par F_κ celle sous $\mathbb{P}_\kappa$. Plus précisément,

$$F_\kappa(x) = \mathbb{P}_\kappa(\log(M) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} e^{\kappa y} F(dy). \tag{2.27}$$

Nous supposerons que $\log(M)$, sous $\mathbb{P}_\kappa$, est dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in]0,1]$, $\log(M) \in D(\alpha)$. Comme $F_\kappa(-x) \leq e^{-\kappa x}$, sous $\mathbb{P}_\kappa$ $\log(M)$ appartient à $D(\alpha)$ si et seulement si

$$1 - F_\kappa(x) = \overline{F}_\kappa(x) = \frac{l(x)}{x^\alpha}, \tag{2.28}$$

où l est une fonction à variations lentes ($\forall c > 0$, $\frac{l(cx)}{l(x)} \to 1$ quand $x \to \infty$).

Définissons la fonction de renouvellement de $\log(M)$ sous $\mathbb{P}_\kappa$ par $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_\kappa^{(*n)}(x)$ où $F_\kappa^{(*n)}$ désigne la fonction de répartition d'une somme V_n de n variables iid de même loi que $\log(M)$. Comme cette marche aléatoire V_n dérive vers l'infini sous $\mathbb{P}_\kappa$ (d'après les hypothèses faites sur ses incréments), nous pouvons montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) < \infty$ (voir [10]). Posons

$$m(x) = \int_0^x \left(F_\kappa(-u) + \overline{F}_\kappa(u)\right) du \sim \int_0^x \overline{F}_\kappa du \sim \frac{l(x)x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \tag{2.29}$$

les équivalents étant valables seulement quand $\alpha \neq 1$.

Dans les preuves, nous aurons besoin de la convergence suivante

$$\forall h > 0, \quad \lim_{x\to\infty} m(x)\left(U(x+h) - U(x)\right) = hC_\alpha \quad \text{où} \quad C_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)}. \tag{2.30}$$

Cette convergence sera vérifiée sous réserve d'avoir (2.28) quand $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Pour le cas, $\alpha \leq \frac{1}{2}$, nous aurons besoin d'une condition équivalente (pour voir que cette condition équivaut à (2.30), consuter le théorème 3.1 de [12] dû à Caravenna et Doney) : si (2.28) est vérifié avec $\alpha \leq \frac{1}{2}$ pour une variable positive de fonction de répartition H, alors (2.30) tient si et seulement si nous avons

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{x\to\infty} x\overline{H}(x) \int_1^{\delta x} \frac{1}{y\overline{H}(y)^2} H(x - dy) = 0. \tag{2.31}$$

Toutes ces notations et hypothèses en place, les suppositions que nous ferons dans ce premier cadre de travail seront donc résumées par

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[M^\kappa] = 1, \quad \exists \kappa > 0 \text{ et } \alpha \in]0,1] \text{ tels que (2.28) et (2.31) tiennent pour } F_\kappa, \\ &\qquad \text{et } \log(M) \text{ conditionné sur } M \neq 0 \text{ est non-arithmétique.} \end{aligned} \tag{2.32}$$

A noter que nous autorisons ici $\mathbb{E}[M^\kappa \log_+(M)] = \infty$, le cas fini étant déjà traité par Goldie.

2.3.2 Un second cadre

Dans ce cadre, nous supposons maintenant que $\mathbb{E}[M^\kappa] = \theta < 1$ pour un certain $\kappa > 0$ et que pour tout $t > \kappa$, $\mathbb{E}[M^t] = \infty$. D'une manière similaire à ce que nous avions défini précédemment, introduisons la probabilité suivante

$$\mathbb{P}_\kappa(\log(M) \in C) = \frac{1}{\theta}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\log(M)\in C} M^\kappa]. \tag{2.33}$$

Sous cette nouvelle probabilité, $\log(M)$ admet pour fonction de répartition

$$F_\kappa(x) = \frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^x e^{\kappa y} F(dy). \tag{2.34}$$

Avec les hypothèses sur M, F_κ est à queue lourde. Ceci change quelque peu la manière dont nous devons traiter l'équation de renouvellement implicite pour la queue de R. Il nous faut donc introduire quelques notions supplémentaires.

Soit $T \in]0, \infty]$, posons $\Delta =]0, T]$. Pour une fonction de répartition H, nous noterons $H(x + \Delta) = H(x + T) - H(x)$.

Définition 2.9 ($\mathcal{L}_\Delta$, $\mathcal{S}_\Delta$ et $\mathcal{S}_{loc}$)**.** *On dira qu'une fonction de répartition H sur $\mathbb{R}$ appartient à :*

- $\mathcal{L}_\Delta$ *si* $\frac{H(x+t+\Delta)}{H(x+\Delta)} \to 1$ *uniformément pour* $t \in [0, 1]$.
- *la classe* $\mathcal{S}_\Delta$ *des lois* Δ*-sous-exponentielles si pour* x *assez grand* $H(x + \Delta) > 0$, $H \in \mathcal{L}_\Delta$ *et* $(H * H)(x + \Delta) \sim 2H(x + \Delta)$, *où* $H * H$ *désigne la fonction de répartition d'une somme de deux variables iid de fonction de répartition* H.
- *la classe* $\mathcal{S}_{loc}$ *des lois localement sous-exponentielles si pour tout* $T > 0$, $H \in \mathcal{S}_\Delta$.

Les hypothèses dont nous aurons besoin pour travailler dans ce second cadre sont résumées comme suit :

$$\mathbb{E}[M^\kappa] = \theta < 1, \quad \kappa > 0, \quad F_\kappa \in \mathcal{S}_{loc}, \quad \sup\{F_\kappa(y + \Delta) : y > x\} = O(F_\kappa(x + \Delta)) \tag{2.35}$$

pour x assez grand, et $\log(M)$ conditionné sur $M \neq 0$ est non-arithmétique.

2.3.3 Résultats

Comme pour les résultats de Goldie, il convient de se donner des théorèmes assez généraux que nous appliquerons ensuite aux cas particuliers qui nous intéressent.

Théorème 2.10. *[Premier cadre, Kevei] Supposons (2.32) et soit R une variable aléatoire dont la queue vérifie la condition intégrale*

$$\int_0^\infty |\mathbb{P}(R > x) - P(MR > x)|\, x^{\kappa+\delta-1} dx < \infty, \tag{2.36}$$

pour un certain $\delta > 0$, M et R étant supposés indépendants. Alors

$$\lim_{x\to\infty} m(\log(x)) x^\kappa \mathbb{P}(R > x) = C_\alpha \int_0^\infty (\mathbb{P}(R > x) - \mathbb{P}(MR > x))\, x^{\kappa-1} dx. \tag{2.37}$$

Théorème 2.11. *[Second cadre, Kevei] Supposons (2.35) et soit R une variable aléatoire dont la queue vérifie la condition intégrale*

$$\int_0^\infty |\mathbb{P}(R > x) - P(MR > x)|\, x^{\kappa+\delta-1} dx < \infty, \tag{2.38}$$

pour un certain $\delta > 0$, M et R étant supposés indépendants. Alors

$$\lim_{x\to\infty} g(\log(x))^{-1} x^\kappa \mathbb{P}(R > x) = \frac{\theta}{(1-\theta)^2} \int_0^\infty (\mathbb{P}(R > x) - \mathbb{P}(MR > x))\, x^{\kappa-1} dx, \tag{2.39}$$

où $g(x) = F_\kappa(x + 1) - F_\kappa(x)$.

Maintenant que ces résultats généraux sont énoncés, nous pouvons en déduire l'asymptotique de la queue des solutions des équations qui nous intéressent dans les deux cadres de travail que nous nous sommes donnés.
Commençons avec le cas affine :

Théorème 2.12. *[Cas affine, premier cadre, Kevei] Supposons (2.32). Supposons également qu'il existe $\nu > \kappa$ tel que $\mathbb{E}[|Q|^\nu] < \infty$. Alors la queue de la solution R de l'équation $R \overset{loi}{=} MR + Q$ vérifie*

$$\lim_{x\to\infty} m(\log(x))x^\kappa \mathbb{P}(R > x) = \frac{C_\alpha}{\kappa}\mathbb{E}\left[(MR+Q)_+^\kappa - (MR)_+^\kappa\right], \tag{2.40}$$
$$\lim_{x\to\infty} m(\log(x))x^\kappa \mathbb{P}(R \leq -x) = \frac{C_\alpha}{\kappa}\mathbb{E}\left[(MR+Q)_-^\kappa - (MR)_-^\kappa\right].$$

De plus, si $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Mx+Q = x) < 1$, alors

$$\mathbb{E}\left[(MR+Q)_+^\kappa - (MR)_+^\kappa\right] + \mathbb{E}\left[(MR+Q)_-^\kappa - (MR)_-^\kappa\right] > 0 \tag{2.41}$$

.

Théorème 2.13. *[Cas affine, second cadre, Kevei] Supposons (2.35). Supposons également qu'il existe $\nu > \kappa$ tel que $\mathbb{E}[|Q|^\nu] < \infty$. Alors la queue de la solution R de l'équation $R \overset{loi}{=} MR + Q$ vérifie*

$$\lim_{x\to\infty} g(\log(x))^{-1}x^\kappa \mathbb{P}(R > x) = \frac{\theta}{\kappa(1-\theta)^2}\mathbb{E}\left[(MR+Q)_+^\kappa - (MR)_+^\kappa\right], \tag{2.42}$$
$$\lim_{x\to\infty} g(\log(x))^{-1}x^\kappa \mathbb{P}(R \leq -x) = \frac{\theta}{\kappa(1-\theta)^2}\mathbb{E}\left[(MR+Q)_-^\kappa - (MR)_-^\kappa\right],$$

où $g(x) = F_\kappa(x+1) - F_\kappa(x)$.

De plus, si $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Mx+Q = x) < 1$, alors

$$\mathbb{E}\left[(MR+Q)_+^\kappa - (MR)_+^\kappa\right] + \mathbb{E}\left[(MR+Q)_-^\kappa - (MR)_-^\kappa\right] > 0 \tag{2.43}$$

.

Remarque. *Les hypothèses faites sur F_κ dans le théorème 2.13 impliquent que $g(\log(x))$ est à variations lentes.*

Nous allons maintenant énoncer les résultats correspondants dans le cas extrémal non seulement car ils sont intéressants au même titre que dans le cas affine mais aussi car ils nous seront utiles pour vérifier la positivité des constantes sous l'hypothèse $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Mx+Q = x) < 1$.

Théorème 2.14. *[Cas extrémal, premier cadre, Kevei] Supposons (2.32). Supposons également qu'il existe $\nu > \kappa$ tel que $\mathbb{E}[|Q|^\nu] < \infty$. Alors la queue de la solution de $R \overset{loi}{=} Q \vee MR$ vérifie*

$$\lim_{x\to\infty} m(\log(x))x^\kappa \mathbb{P}(R > x) = \frac{C_\alpha}{\kappa}\mathbb{E}\left[(MR_+ \vee Q_+)^\kappa - (MR_+)^\kappa\right]. \tag{2.44}$$

Théorème 2.15. *[Cas extrémal, second cadre, Kevei] Supposons (2.35). Supposons aussi qu'il existe $\nu > \kappa$ tel que $\mathbb{E}[|Q|^\kappa] < \infty$. Alors la queue de la solution de $R \overset{loi}{=} Q \vee MR$ vérifie*

$$\lim_{x\to\infty} g(\log(x))^{-1}x^\kappa \mathbb{P}(R > x) = \frac{\theta}{\kappa(1-\theta)^2}\mathbb{E}\left[(MR_+ \vee Q_+)^\kappa - (MR_+)^\kappa\right]. \tag{2.45}$$

2.4 Preuves et heuristiques

La méthodologie des preuves des résultats précédents étant globalement la même, nous nous contenterons d'esquisser les preuves des résultats de Goldie mais nous rentrerons plus dans les détails pour les résultats de Kevei, certaines considérations techniques supplémentaires étant de rigueur. Pour plus de détails concernant les résultats de Goldie, nous renvoyons le lecteur à [6].

2.4.1 Esquisse des preuves des résultats de Goldie

Avant de commencer les preuves, nous énonçons deux lemmes se trouvant dans Goldie [6] qui seront souvent utilisés pour la conclusion de chaque preuve.

Lemme 2.16. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\check{f}$ est dRi.*

Lemme 2.17. *Si $\int_0^t u^\kappa \mathbb{P}(R > u)du \sim C_+ t (t \to \infty)$ alors $\mathbb{P}(R > t) \sim C_+ t^{-\kappa} (t \to \infty)$.*

Esquisse de preuve du théorème 2.3. On considère $M', M_1, ..., M_k$ des copies iid de M, toutes indépendantes de R. Nous aurons besoin de quelques notations :

$$Y_k := \log|M_k|, \quad V_k := \log|\Pi_k| = \sum_{j=1}^k Y_j \tag{2.46}$$

$$r(t) := e^{\kappa t}\mathbb{P}(R > t), \quad \delta_n(t) := e^{\kappa t}\mathbb{P}(\Pi_n R > e^t) \tag{2.47}$$

$$g_1(t) := e^{\kappa t}\left(\mathbb{P}(R > e^t) - \mathbb{P}(MR > e^t)\right), \tag{2.48}$$

$$g_{-1} := e^{\kappa t}\left(\mathbb{P}(R < -e^t) - \mathbb{P}(MR < -e^t)\right). \tag{2.49}$$

Premier cas : $M \geq 0$ p.s.. Par téléscopage, nous pouvons obtenir que

$$\mathbb{P}(R > e^t) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{P}(R > e^{t-u}) - \mathbb{P}(MR > e^{t-u})\right)\mathbb{P}(V_k \in du) + \mathbb{P}(e^{V_n}R > e^t). \tag{2.50}$$

On pose $\nu_n(dt) := e^{\kappa t} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(V_k \in dt)$. De ce qui précède, on déduit une équation de renouvellement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad r(t) = g_1 * \nu_{n-1}(t) + \delta_n(t). \tag{2.51}$$

On en déduit après régularisation, définie par $\check{f}(t) := \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)} f(u) du$, que

$$\forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad \check{r}(t) = \check{g}_1 * \nu_{n-1}(t) + \check{\delta}_n(t). \tag{2.52}$$

Notons $\eta(du) := e^{\kappa u}\mathbb{P}(Y_1 \in du)$ et $\nu(dt) := \sum_{k=0}^{\infty} e^{\kappa t}\mathbb{P}(V_k \in dt)$ sa mesure de renouvellement.
Par des arguments sur les fonctions dRi, on a en passant à la limite $n \to \infty$ que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \check{r}(t) = \check{g}_1 * \nu(t). \tag{2.53}$$

Le fait que $\check{\delta}_n$ tend vers 0 est dû au fait que V_n dérive vers $-\infty$.
On applique ensuite le théorème fondamental du renouvellement 1.3 pour avoir

$$\check{r}(t) \to \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1. \tag{2.54}$$

Le lemme 2.17 permet d'obtenir l'asymptotique. Pour l'expression exacte de la constante, il suffit de remarquer le théorème de Fubini donne $\int_{\mathbb{R}} \check{g}_1 = \int_{\mathbb{R}} g_1$.

Deuxième cas : $M \leq 0$ p.s..
Nous pouvons montrer que

$$\int_0^\infty \left| \mathbb{P}(R > t) - \mathbb{P}(MM'R > t) \right| t^{\kappa-1} dt < \infty. \tag{2.55}$$

De là, il suffit d'appliquer le premier cas à la variable $MM' \geq 0$ p.s.. On trouve alors l'expression de C_+ correspondante quitte à la manipuler un peu.

Troisième et dernier cas : $\mathbb{P}(M > 0) > 0$ et $\mathbb{P}(M < 0) > 0$.
Notons $X_n = \mathrm{sgn}(\Pi_n)$. Appliquant le même téléscopage que dans le cas $M \geq 0$ p.s., nous obtenons l'équation de renouvellement

$$\forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad r(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[e^{\kappa V_k} g_{X_k}(t - V_k)] + \delta_n(t). \tag{2.56}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, $\check{\delta}_n(t)$ converge vers 0 quand $n \to \infty$.
Comme $\mathbb{E}[|M|^\kappa] = 1$, nous pouvons effectuer un changement de mesure pour les M_n.
Nous noterons $\tilde{\mathbb{P}}$ et $\tilde{\mathbb{E}}$ pour cette nouvelle probabilité définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \tilde{\mathbb{P}}(M \in dy) := |y|^\kappa \mathbb{P}(M \in dy). \tag{2.57}$$

Adaptant les expressions de Π_n, V_n, X_n, nous obtenons sous la nouvelle mesure l'équation de renouvellement

$$\forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad r(t) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{\mathbb{E}}[g_{X_k}(t - V_k)] + \delta_n(t). \tag{2.58}$$

Appliquant la transformation régularisante, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad \check{r}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\mathbb{E}}[\check{g}_{X_k}(t - V_k)] + \check{\delta}_n(t). \tag{2.59}$$

(X_n) est une chaîne de Markov sur $\{-1, 1\}$ démarrant en 1 et de matrice de transition sous $\tilde{\mathbb{P}}$ donnée par $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$, où $p = \tilde{\mathbb{P}}(M > 0)$ et $q = \tilde{\mathbb{P}}(M < 0)$. Notons η_+ et η_- respectivement les lois conditionnelles de $\log |M|$ sous $\tilde{\mathbb{P}}$ sachant $M > 0$ et $M < 0$ respectivement. Notons $0 = N_0^{(+)} < N_1^{(+)} < ...$ les instants n où $X_n = 1$ et $N_0^{(-)} < N_1^{(-)} < ...$ ceux où $X_n = -1$. Notons $I_n^{(+)} = \max\{i : N_i^{(+)} \leq n - 1\}$, $I_n^{(-)} = \max\{i : N_i^{(-)} \leq n - 1\}$. Alors

$$\forall t, n, \quad \check{r}(t) = \tilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=0}^{I_n^{(+)}} \check{g}_1(t - W_k^{(+)})\right] + \tilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=0}^{I_n^{(-)}} \check{g}_{-1}(t - W_k^{(-)})\right] + \check{\delta}_n(t), \tag{2.60}$$

où $W_k^{(+/-)} = V_{N_k^{(+/-)}}$. Soit η la loi de $Y_1 + ... + Y_{N_1^{(+)}}$. Nous avons

$$\eta = p\eta_+ + \sum_{k=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} \eta_-^{(2)} * \eta_+^{(n-2)}, \tag{2.61}$$

nous déduisons de cette équation que $\int_{\mathbb{R}} y\eta(dy) = 2m$ et η est non-arithmétique.
De là, notons ν la mesure de renouvellement générée par η. Des considérations de directe Riemann-intégrabilité permettent de passer à la limite afin d'obtenir

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \check{r}(t) = \check{g}_1 * \nu(t) + \check{g}_{-1} * \eta_0 * \nu(t), \tag{2.62}$$

où η_0 est la loi de $W_0^{(-)}$. Nous pouvons enfin appliquer le théorème fondamental du renouvellement 1.3, obtenant

$$\check{r}(t) \to \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} (g_1 + g_{-1}). \tag{2.63}$$

Nous concluons grâce au lemme 2.17. $\square$

Heuristique du théorème 2.5. L'objectif est d'appliquer le corollaire 2.4 à $\psi(t) = Q + Mt$.

Découpons :

$$\frac{1}{\kappa}\mathbb{E}\left[((Q+MR)_+)^\kappa - ((MR)_+)^\kappa\right] = \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{-Q<MR\leq 0}(Q+MR)^\kappa\right] \tag{2.64}$$

$$+\frac{1}{\kappa}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{0<MR\leq -Q}(MR)^\kappa\right] \tag{2.65}$$

$$+\frac{1}{\kappa}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Q>0,MR>0}((Q+MR)^\kappa - (MR)^\kappa)\right] \tag{2.66}$$

$$+\frac{1}{\kappa}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{0<-Q<MR}((MR)^\kappa - (Q+MR)^\kappa)\right]. \tag{2.67}$$

On montre ensuite que chacune des espérances est finie. Pour (2.64) et (2.65), c'est une conséquence de l'hypothèse sur Q. Pour les deux autres espérances, il faut utiliser des inégalités déterministes pour se ramener, en utilisant l'inégalité de Hölder, à une majoration faisant intervenir uniquement des moments que l'on sait fini par nos hypothèses. A partir de là, nous pouvons appliquer le corollaire 2.4. Il reste donc à vérifier que si $\forall c \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Q = (1-M)c) < 1$ alors $C_+ + C_- > 0$, la réciproque étant claire (faire $Q = 0$, $R - c = M(R-c)$...).
C'est là qu'intervient la proposition 2.6. En l'appliquant, on peut montrer que

$$\mathbb{P}(|R| > t) \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(|Q - \mathrm{med}(R)(1-M)| > \epsilon\right)\mathbb{P}\left(\exists n \geq 1 : |\Pi_n| > \frac{2t}{\epsilon}\right). \tag{2.68}$$

On peut prendre $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}\left(|Q - \mathrm{med}(R)(1-M)| > \epsilon\right) > 0$. Ensuite, en utilisant la décomposition de Wiener-Hopf de la marche aléatoire transciente V_n d'incréments iid $\log|M|$, on montre que $\mathbb{P}\left(\exists n \geq 1 : |\Pi_n| > \frac{2t}{\epsilon}\right) \geq \delta e^{-\kappa t}$ pour t assez grand et un certain $\delta > 0$. Ceci permet de conclure. □

Heuristique du théorème 2.8. La proposition 2.7 donne l'existence et l'unicité. Il suffit donc d'appliquer le corollaire 2.4 pour obtenir l'asymptotique.
Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|((Q \vee MR)_+)^\kappa - ((MR)_+)^\kappa|\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{MR<Q,Q>0}(Q^\kappa - (MR_+)^\kappa)\right] \\ &\leq \mathbb{E}[(Q_+)^\kappa] < \infty,\end{aligned}$$

donc le corollaire 2.4 s'applique.
Pour la discussion sur la stricte positivité de C_+, il est claire que si $Q \leq 0$ p.s., $C_+ = 0$. Réciproquement, il existe $c > 0$ tel que $\mathbb{P}(Q > c) > 0$ et on peut montrer que

$$\mathbb{P}(R > t) \geq \mathbb{P}(Q > c)\mathbb{P}\left(\bigvee_{k=1}^{\infty}\Pi_{k-1} > \frac{t}{c}\right). \tag{2.69}$$

Comme dans l'heuristique du théorème 2.5, on montre que $\mathbb{P}\left(\bigvee_{k=1}^{\infty}\Pi_{k-1} > \frac{t}{c}\right)$ est plus grand que $\delta t^{-\kappa}$ pour t assez grand. Ceci permet de conclure. □

2.4.2 Preuves des résultats de Kevei

Preuve du théorème 2.10. Nous conservons les notations utilisées dans les esquisses des preuves des résultats de Goldie. Nous avons, en utilisant l'indépendance de M et R et le fait que $\mathbb{E}[M^\kappa] = 1$, le même résultat qu'après le téléscopage de Goldie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad r(t) = g_1(t) + \mathbb{E}[r(t - \log(M))M^\kappa]. \tag{2.70}$$

Passons sous $\mathbb{P}_\kappa$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad r(t) = g_1(t) + \mathbb{E}_\kappa[r(t - \log(M))]. \tag{2.71}$$

g_1 n'ayant aucune raison d'être dRi, nous régularisons cette équation de renouvellement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \check{r}(t) = \check{g}_1(t) + \mathbb{E}_\kappa[\check{r}(t - \log(M))]. \tag{2.72}$$

Nous pouvons itérer cette relation $n \geq 1$ fois (à noter que les méthodes itératives de résolution de ce genre d'équations sont traitées dans un cadre général par [3]) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \check{r}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(t-y) F_\kappa^{(*k)}(dy) + \mathbb{E}_\kappa[\check{r}(t - V_n)]. \tag{2.73}$$

A noter que l'on obtient une version régularisée de l'équation (2.50). Comme la marche aléatoire transciente V_n dérive vers $-\infty$ sous $\mathbb{P}$, nous avons

$$\mathbb{E}_\kappa[\check{r}(t - V_n)] \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.74}$$

Faisant $n \to \infty$ dans (2.73) et utilisant le théorème de Fubini, nous obtenons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \check{r}(t) = \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(t-y) U(dy), \tag{2.75}$$

où nous rappelons que $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_\kappa^{(*n)}(x)$ où $F_\kappa^{(*n)}$ désigne la fonction de répartition d'une somme V_n de n variables iid de même loi que $\log(M)$ sous $\mathbb{P}_\kappa$.
Contrairement au cadre dans lequel nous étions pour les résultats de Goldie, nous ne pouvons pas nous contenter d'avoir $\check{g}_1$ dRi pour appliquer le théorème fondamental du renouvellement. Un contre-exemple est fourni par Kevei dans [12]. Nous aurons donc besoin du lemme suivant :

Lemme 2.18 (Condition d'application du théorème fondamental du renouvellement)**.** *Supposons z dRi, $z(x) = O(1/x)(x \to \infty)$ et (2.32). Alors (2.30) implique que*

$$m(x) \int_{\mathbb{R}} z(x-y) U(dy) \to C_\alpha \int_{\mathbb{R}} z(y) dy. \tag{2.76}$$

Dans les grandes lignes, il suffit de décomposer le terme de gauche en trois intégrales : une sur $]x,\infty[$, une sur $]0,x]$ et une sur $]-\infty,0]$; on montre ensuite la convergence de chacune de ces intégrales en usant de l'hypothèse dRi et en faisant tendre vers 0 les quantités requises. Pour plus de détails sur la preuve de ce lemme, consulter [12].

Il nous faut donc montrer que $\breve{g}_1$ vérifie les conditions du lemme 2.18.

$$\begin{aligned}\breve{g}_1(t) &= e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{(\kappa+1)x}\left(\mathbb{P}(R>e^x)-\mathbb{P}(MR>e^x)\right)dx\\ &\leq e^{-t}\int_0^{e^t} y^{\kappa}\left|\mathbb{P}(R>y)-\mathbb{P}(MR>y)\right|dy\\ &\leq e^{-\delta t}\int_0^{\infty} y^{\kappa+\delta-1}\left|\mathbb{P}(R>y)-\mathbb{P}(MR>y)\right|dy.\end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie grâce à nos hypothèses, donc $\breve{g}_1(t)=O(e^{-\delta t})$, ce qui est mieux que $O(t^{-1})$. D'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}}\breve{g}_1(t)dt=\int_{\mathbb{R}}g_1(t)dt=\int_0^{\infty}y^{\kappa-1}\left(\mathbb{P}(R>y)-\mathbb{P}(MR>y)\right)dy, \tag{2.77}$$

ce qui permet, via le lemme 2.16, d'obtenir que $\breve{g}_1$ est dRi. Donc le lemme 2.18 peut s'appliquer. En utilisant alors le lemme 2.17, ceci conclut la preuve. □

Preuve du théorème 2.11. Le *modus operandi* est le même que dans la preuve précédente. Nous obtenons que

$$\breve{r}(t)=\int_{\mathbb{R}}\breve{g}_1(t-y)U(dy), \tag{2.78}$$

où $U(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\theta F_{\kappa})^{(*n)}(x)$. Remarquons que $\theta<1$ implique que $U(\mathbb{R})=\frac{1}{1-\theta}<\infty$. Modifiant le théorème 5 de [1], nous obtenons le lemme qui suit

Lemme 2.19. *Supposons (2.35), z est dRi et vérifie $z(x)=o(g(x))$ où g est la fonction définie pour le théorème 2.13. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}}z(x-y)U(dy)\sim\frac{\theta g(x)}{(1-\theta)^2}\int_{\mathbb{R}}z(y)dy\quad(x\to\infty). \tag{2.79}$$

Là encore, nous ne prouverons pas celle et renvoyons à [12]. Ceci dit le principe de sa preuve ressemble à celle du lemme 2.18, en s'adaptant aux hypothèses.

De la même manière que précédemment, nous avons $\breve{g}_1(t)=O(e^{-\delta t})$ pour un certain $\delta>0$. Comme F_{κ} est sous-exponentielle, on en déduit que $\breve{g}_1(t)=o(g(t))$. Nous pouvons donc appliquer le lemme 2.19. Ainsi,

$$\breve{r}(t)\sim\frac{\theta g(t)}{(1-\theta)^2}\int_{\mathbb{R}}g_1(y)dy\quad(t\to\infty). \tag{2.80}$$

Comme $g(x)$ est sous-exponentielle, $g(\log(x))$ est à variations lentes et la preuve suit celle du lemme 2.17 (à noter qu'il faut en fait une version à variations régulières de ce lemme, version que l'on trouve dans Bingham, Goldie et Teugels). Ceci achève la preuve. $\square$

Preuves des théorèmes 2.14 et 2.15. Le principe de Letac assure l'existence et l'unicité de la solution. Soit $\delta \in]0, \nu - \kappa[$. Nous avons

$$|\mathbb{P}(MR \vee Q > t) - \mathbb{P}(MR > t)| = \mathbb{P}(MR \vee Q > t \geq MR), \tag{2.81}$$

donc par théorème de Fubini,

$$\int_0^\infty |\mathbb{P}(MR \vee Q > t) - \mathbb{P}(MR > t)|\, t^{\kappa+\delta-1} dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(MR \vee Q > t \geq MR) t^{\kappa+\delta-1} dt \tag{2.82}$$

$$= \frac{1}{\kappa+\delta}\mathbb{E}\left[(MR \vee Q)_+^{\kappa+\delta} - (MR)_+^{\kappa+\delta}\right] \tag{2.83}$$

$$\leq \frac{1}{\kappa+\delta}\mathbb{E}[Q_+^{\kappa+\delta}]. \tag{2.84}$$

Nous pouvons donc appliquer les théorèmes 2.10 et 2.11 pour obtenir l'asymptotique souhaitée. Les formes des constantes s'obtiennent par théorème de Fubini.
On remarque que si $Q = 1$ p.s., nous avons à faire au maximum d'une marche aléatoire avec un drift négatif, donc la constante est strictement positive. $\square$

Preuves des théorèmes 2.12 et 2.13. L'existence et l'unicité de la solution découle du principe de Letac. Soit $\delta > 0$ tel que

$$\text{Si } \kappa \geq 1, \quad \kappa + \frac{3\kappa\delta}{1-\delta} < \nu \text{ et si } \kappa < 1, \quad \kappa + \delta \leq 1 \wedge \nu. \tag{2.85}$$

Ecrivons

$$|\mathbb{P}(MR + Q > t) - \mathbb{P}(MR > t)| \leq \mathbb{P}(MR + Q > t \geq MR) + \mathbb{P}(MR > t \geq MR + Q).$$

Par théorème de Fubini sur le premier terme du membre de droite de l'inégalité après intégration,

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(MR + Q > t \geq MR) t^{\kappa+\delta-1} dt \leq \frac{1}{\kappa+\delta}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Q\geq 0}\left((MR+Q)_+^{\kappa+\delta} - (MR)_+^{\kappa+\delta}\right)\right]$$

Pour le second terme, on obtient un résultat similaire et en sommant il vient

$$\int_0^\infty |\mathbb{P}(MR + Q > t) - \mathbb{P}(MR > t)|\, t^{\kappa+\delta-1} dt \leq \frac{1}{\kappa+\delta}\mathbb{E}\left[\left|(MR+Q)_+^{\kappa+\delta} - (MR)_+^{\kappa+\delta}\right|\right].$$

Pour montrer que le terme de droite de cette inégalité est fini, une disjonction de cas suivant si $\kappa \geq 1$ ou $\kappa < 1$ est de rigueur. Dans le second cas, une inégalité triangulaire nous donne une majoration par $\mathbb{E}[|Q|^{\kappa+\delta}] < \infty$. Dans le premier cas, une majoration déterministe est utilisée, suivie de l'inégalité de Hölder pour se ramener à des moments tous finis (voir [12]). Ainsi, on obtient l'asymptotique voulue en appliquant les théorèmes 2.10 et 2.11 respectivement.

Il reste encore à voir la stricte positivité de la somme des constantes. Reprenant la conséquence de l'inégalité de Grincevičius (proposition 2.6) vue dans l'heuristique du théorème 2.5, nous avons

$$\mathbb{P}(|R| > t) \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}(|Q - \mathrm{med}(R)(1-M)| > \epsilon)\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} V_n > \log(t) + \log\left(\frac{2}{\epsilon}\right)\right), \quad (2.86)$$

où l'on rappelle que $\mathbb{P}(|Q - \mathrm{med}(R)(1-M)| > \epsilon) > 0$ et $\epsilon > 0$ est suffisamment petit pour que $\frac{2}{\epsilon} > 1$. De là, il suffit d'appliquer les théorèmes 2.14 et 2.15 respectivement, tout deux avec $Q \equiv 1$ pour obtenir la stricte positivité demandée. $\square$

Chapitre 3

Lois de puissance sur des arbres pondérés

Il va s'agir dans ce chapitre d'étudier une équation de point fixe plus générale que celles traitées précédemment. Nous nous appuyerons dans cette section sur les travaux de Jelenković et Olvera-Craviotto [8],[9]. En effet, gardons à l'esprit l'application que l'on voudrait faire pour connaître le comportement de la queue de $W_\infty^{(\theta)}$ pour la marche aléatoire branchante (voir le dernier chapitre). A cette fin, considérons maintenant l'équation

$$R \stackrel{loi}{=} \sum_{i=1}^{N} C_i R_i + Q \tag{3.1}$$

où les R_i sont iid de même loi que R et indépendants de $(Q, N, C_1, C_2, ...)$, vecteur aléatoire positif, N prenant ses valeurs dans $\mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$. On peut déjà pressentir que les C_i vont jouer le rôle de poids et que cette somme correspond à un branchement avec un nombre N d'enfants.

A noter que ces équations ont été étudiées du point de vue des transformées de Laplace (les variables étant positives) par Durrett et Liggett [4] (cas homogène), voyant cette égalité en loi comme un point fixe des itérations d'une transformation régularisante pour obtenir l'existence de solutions. Pour ce qui est de l'origine même de l'intérêt porté à cette transformation régularisante, il s'agit de travaux de Holley et Liggett [7] sur les processus régularisants introduits par Spitzer [15]. On pourra consulter [3] pour des compléments sur cette transformation régularisante.

3.1 Modèle

Avec ces idées en tête, construisons en détail un arbre aléatoire de branchement pondéré.

Nous allons constuire un arbre aléatoire $\mathcal{T}$. Notons A_n l'ensemble des individus de la n-ième génération de $\mathcal{T}$ et Z_n le cardinal correspondant. Bien évidemment, $Z_0 = 1$. On notera $\mathcal{U}$ l'arbre d'Ulam. Pour des raisons de simplicité, si $i \in \mathcal{U}$ est de longueur 1, on confondra i et i_1 (première coordonnée). On notera (i, j) la concaténation de i et j.

Pour démarrer notre construction, on commence par poser $A_0 = \emptyset$, la racine. Cette racine aura $N := N_\emptyset$ enfants. Soient $(N_i)_{i\in\mathcal{U}}$ des copies iid de N. On construit alors la génération suivante :

$$A_1 := \{i \in \mathbb{N}* : 1 \leq i \leq N\}$$

puis

$$A_n := \{i = (i_1, ..., i_n) \in \mathcal{U} : (i_1, ..., i_{n-1}) \in A_{n-1}, 1 \leq i_n \leq N_{(i_1,...,i_{n-1})}\}.$$

On a alors une formule pour Z_n qui est $Z_n = \sum_{i\in A_{n-1}} N_i$.

Cette première constuction nous donne un arbre aléatoire sans poids. Nous allons ajouter quelques ingrédients à cette construction pour que l'arbre qui en résulte soit pondéré, arbre que l'on notera $\mathcal{T}_{Q,C}$.
Soit $(Q, N, C_1, C_2, ...) := (Q_\emptyset, N_\emptyset, C_{(\emptyset,1)}, C_{(\emptyset,2)}, ...)$ avec N à valeurs dans $\mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$ et supposons $\mathbb{P}(Q > 0) > 0$ (rappel : toutes les variables de ce vecteur sont positives). N joue le même rôle que précédemment.
On construit chaque génération comme précédemment, à ceci près que chaque noeud i de l'arbre $\mathcal{T}_{Q,C}$ se voit attribué un vecteur $(Q_i, N_i, C_{(i,1)}, C_{(i,2)}, ...)$ de même loi que $(Q, N, C_1, C_2, ...)$, tous les vecteurs d'une même génération étant indépendants.
Enfin, on définit Π_i par

$$\Pi_\emptyset = 1$$
$$\Pi_{(i_1,...,i_n)} = C_{(i_1,...,i_n)}\Pi_{(i_1,...,i_{n-1})}$$

Ceci achève la construction de $\mathcal{T}_{Q,C}$.
A noter que l'on oubliera parfois Q, en particulier pour traiter l'équation homogène. Quand on supposera $Q = 0$ p.s., on notera $\mathcal{T}_C$ l'arbre correspondant, afin d'alléger les écritures.

3.2 Résultats généraux

Par plusieurs aspects, l'équation (3.1) ressemble assez fortement à l'équation (2.15). La différence notable est que nous avons une fonction de plusieurs v.a.i.i.d et que celles-ci sont en nombre aléatoire. Nous verrons que le fait d'avoir une grande somme (avec un nombre aléatoire de termes) plutôt qu'un terme affine, demande l'utilisation de quelques inégalités, la plupart convexes, pour majorer les moments de certaines variables et d'utiliser des espérances.

Pour commencer, énonçons un lemme et un théorème généraux (car, là encore, nous ne supposerons pas que R est une solution) qui sont des généralisations des résultats de Goldie. Nous supposons ici que $Q = 0$ p.s..

Lemme 3.1 (Jelenković, Olvera-Cravioto)**.** *Soit $\mathcal{T}_C$ l'arbre aléatoire construit précédemment. Pour $n \in \mathbb{N}$, $i \in A_n$, notons $V_i := \log(\Pi_i)$. Pour $\kappa > 0$, notons $\mu_n(dt) := e^{\kappa t}\mathbb{E}[\sum_{i \in A_n} \mathbb{1}_{V_i \in dt}]$ et $\eta(dt) := \mu_1(dt)$.*
Supposons $\exists j \geq 1$ tel que $\mathbb{P}(N \geq j, C_j > 0) > 0$ et $\mathbb{P}(\log(C_j) \in du, C_j > 0, N \geq j)$ est non-arithmétique. Supposons aussi qu'il existe $\kappa > 0$ tel que

$$0 < \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} C_i^\kappa \log(C_i)] < \infty, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} C_i^\kappa] = 1. \tag{3.3}$$

Alors η est une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$, non-arithmétique, ne mettant pas de masse en $-\infty$ et de moyenne donnée par

$$\int_{\mathbb{R}} u\eta(du) = \mathbb{E}[\sum_{j=1}^{N} C_j^\kappa \log(C_j)] \tag{3.4}$$

Et $\mu_n(dt) = \eta^{*n}(dt)$.

Théorème 3.2 (Jelenković, Olvera-Cravioto)**.** *Supposons les hypothèses du lemme* 3.1 *vérifiées.*
Supposons aussi qu'il existe $\gamma \in]0, \kappa[$ tel que $\mathbb{E}[\sum_{j=1}^{N} C_j^\gamma] < \infty$, que R est indépendant de $(N, C_1, C_2, ...)$ avec $\forall \beta \in]0, \kappa[, \mathbb{E}[R^\beta] < \infty$.
Si

$$\int_0^\infty |\mathbb{P}(R > t) - \mathbb{E}[\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{C_j R > t}]| t^{\kappa-1} dt < \infty \tag{3.5}$$

alors

$$\mathbb{P}(R > t) \sim H t^{-\kappa} (t \to \infty) \tag{3.6}$$

où $H \in [0, \infty[$ est donné par

$$H = \frac{1}{\mathbb{E}[\sum_{j=1}^{N} C_j^\kappa \log(C_j)]} \int_0^\infty v^{\kappa-1} \left(\mathbb{P}(R > v) - \mathbb{E}[\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{C_j R > v}] \right) dv \tag{3.7}$$

On retrouve une condition de contrôle intégral sur la queue de R, tout comme dans le résultat original de Goldie. Le résultat reste assez similaire dans sa forme.

3.3 Queues des solutions de l'équation non-homogène

Nous supposons ici que $Q \neq 0$, sinon nous aurions $R = 0$.
Une fois encore, nous allons trouver une loi solution comme loi limite d'une certaine suite de variables aléatoires.

Posons $W_0 := Q$, $W_n := \sum_{i \in A_n} Q_i \Pi_i$ pour $n \in \mathbb{N}*$. On définit alors $R^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} W_k$ la somme des poids sur tous les noeuds jusqu'à la n-ème génération.

La propriété de branchement nous donne une relation de récurrence :

$$R^{(n)} = \sum_{j=1}^{N_\emptyset} C_{(\emptyset,j)} R_j^{(n-1)} + Q_\emptyset = \sum_{j=1}^{N} C_j R_j^{(n-1)} + Q \tag{3.8}$$

$$R_j^{(0)} = Q_j, \tag{3.9}$$

où les $R_j^{(n-1)}$ sont des copies iid de $R^{(n-1)}$. De même, on a une relation pour les W_n :

$$W_n \stackrel{loi}{=} \sum_{k=1}^{N} C_k W_{n-1,k} \tag{3.10}$$

où les $W_{n-1,k}$ sont des copies iid de W_{n-1} et indépendantes de $(N, C_1, C_2, ...)$.

Définissant alors R comme la limite monotone en loi des $R^{(n)}$, on a

$$R \stackrel{loi}{=} \sum_{k \geq 0} W_k = \lim_{n \to \infty} \uparrow \sum_{k=0}^{n} W_k \tag{3.11}$$

Si l'on se donne $R_j^{(\infty)}$ des copies iid de R, indépendantes de $(Q, N, C_1, C_2, ...)$, il est aisé de vérifier alors que

$$R = \sum_{j=1}^{N} C_j R_j^{(\infty)} + Q \tag{3.12}$$

Théorème 3.3 (Jelenković, Olvera-Cravioto)**.** *Considérons la solution R étant la limite des $R^{(n)}$. Supposons qu'il existe $j \geq 1$ tel que $\mathbb{P}(N \geq j, C_j > 0) > 0$ et tel que la probabilité $\mathbb{P}(\log(C_j) \in du, C_j > 0, N \geq j)$ est non-arithmétique. Supposons aussi qu'il existe $\kappa > 0$ tel que*

$$\mathbb{E}[Q^\kappa] < \infty, \tag{3.13}$$

$$0 < \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} C_i^\kappa \log(C_i)] < \infty, \tag{3.14}$$

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} C_i^\kappa] = 1. \tag{3.15}$$

Supposons de plus l'une des deux assertions suivantes :

1. $\kappa > 1$, $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N C_i] < 1$ *et* $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^N C_i\right)^\kappa\right] < \infty$

2. $\kappa \in]0,1]$ *et il existe* $\epsilon \in]0,1[$ *tel que* $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^N C_i^{\kappa/(1+\epsilon)}\right)^{1+\epsilon}\right] < \infty$

Alors

$$\mathbb{P}(R > t) \sim Ht^{-\kappa}(t \to \infty) \tag{3.16}$$

où $H \in \mathbb{R}_+$ *est donné par*

$$H = \frac{1}{\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N C_i^\kappa \log(C_i)]} \int_0^\infty v^{\kappa-1}\left(\mathbb{P}(R > v) - \mathbb{E}[\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{C_i R > v}]\right) dv \tag{3.17}$$

$$= \frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^N C_i R_i + Q\right)^\kappa - \sum_{i=1}^N (C_i R_i)^\kappa\right]}{\kappa \mathbb{E}[\sum_{i=1}^N C_i^\kappa \log(C_i)]}. \tag{3.18}$$

Remarque. *Pour le cas* $\kappa \in]0,1]$, *la sosu-additivité de la fonction* $x \mapsto x^\kappa$ *donne gratuitement que*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^N C_i\right)^\kappa\right] \leq \mathbb{E}[\sum_{i=1}^N C_i^\kappa] = 1 < \infty$$

Du théorème précédent, découle le corollaire suivant en développant l'expression de H.

Corollaire 3.4 (Jelenković, Olvera-Cravioto)**.** *Prenons* $\kappa \in \mathbb{N}*$. *Sous les hypothèses du théorème* 3.3, *on a une formule explicite pour* H *comme fonction de* $\mathbb{E}[R^k]$, $\mathbb{E}[C^k]$, $\mathbb{E}[Q^k]$ *et* $k \in [\![0, \kappa - 1]\!]$. *En particulier, quand* $\kappa = 1$, *on a*

$$H = \frac{\mathbb{E}[Q]}{\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N C_i \log(C_i)\right]}, \tag{3.19}$$

et pour $\kappa = 2$,

$$H = \frac{\mathbb{E}[Q^2] + 2\mathbb{E}[R]\mathbb{E}\left[Q\sum_{i=1}^N C_i\right] + 2\left(\mathbb{E}[R]\right)^2 \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N C_i C_j\right]}{2\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N C_i^2 \log(C_i)\right]}, \tag{3.20}$$

$$\mathbb{E}[R] = \frac{\mathbb{E}[Q]}{1 - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N C_i\right]}. \tag{3.21}$$

3.4 Cas homogène critique

On étudie ici l'équation

$$R \stackrel{loi}{=} \sum_{i=1}^{N} C_i R_i \tag{3.22}$$

au régime critique $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} C_i\right] = 1$.

Pour construire une solution, on adapte un peu ce qui a été fait dans le cas non-homogène. En effet, définissons $W_0 := 1$ et $W_n := \sum_{i \in A_n} \Pi_i$. Nous avons ici une martingale positive donc elle converge presque sûrement vers une limite R, et en appliquant cette convergence à l'équation

$$W_n \stackrel{loi}{=} \sum_{i=1}^{N} C_i W_{n-1,i} \tag{3.23}$$

on obtient bien une solution. Et on peut même dire que $\mathbb{E}[R] \leq 1$.

Enonçons maintenant le résultat dans notre cas présent :

Théorème 3.5 (Jelenković, Olvera-Cravioto)**.** *Supposons $\exists j \geq 1 : \mathbb{P}(N \geq j, C_j > 0) > 0$ et $\mathbb{P}(\log(C_j) \in du, C_j > 0, N \geq j)$ est non-arithmétique. Supposons aussi qu'il existe $\kappa > 1$ tel que*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} C_i\right)^{\kappa}\right] < \infty, \tag{3.24}$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} C_i^{\kappa} \log^{+}(C_i)\right] < \infty, \tag{3.25}$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} C_i\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} C_i^{\kappa}\right] = 1. \tag{3.26}$$

Alors l'équation (3.22) a une solution avec $0 < \mathbb{E}[R] < \infty$ telle que

$$\mathbb{P}(R > t) \sim H t^{-\kappa} (t \to \infty) \tag{3.27}$$

où $H \in [0, \infty[$ est donnée par

$$H = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} C_i^{\kappa} \log(C_i)\right]} \int_0^{\infty} v^{\kappa-1} \left(\mathbb{P}(R > v) - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{C_i R > v}\right]\right) dv \tag{3.28}$$

$$= \frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} C_i R_i\right)^{\kappa} - \sum_{i=1}^{N} C_i^{\kappa} R_i^{\kappa}\right]}{\kappa \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} C_i^{\kappa} \log(C_i)\right]}. \tag{3.29}$$

De plus, si $\mathbb{P}(\tilde{N} \geq 2) > 0$, avec $\tilde{N} := \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{C_i > 0}$ alors $H > 0$.

Remarque. *On ne prétend pas démontrer ici l'unicité. Cependant, dans le cadre qui nous intéresse, on peut montrer que la loi solution est unique (voir [13]).*

3.5 Preuves

Preuve du théorème 3.2.
Pour un mot $i \in \mathcal{U}$, on note $i|k$ sa restriction de taille k.
Définissons $\forall i \in A_n, k \leq n, V_{i|k} = \log(\Pi_{i|k})$. Notons dès lors que $\Pi_{i|k}$ est indépendant de $N_{i|k}$ mais n'est pas indépendant des $N_{i|s}$ pour tout $s \leq k-1$.
On pose $\mathcal{F}_k = \sigma\left(\left\{(N_i, C_{(i,1)}, C_{(i,2)}, ...) : i \in A_j, j \in [\![0, k-1]\!]\right\}\right)$. Commençons alors comme dans la preuve de Goldie à réexprimer la queue de R grâce à un téléscopage et un conditionnement suivant la filtration $\mathcal{F}_k$: il vient alors

$$\mathbb{P}(R > e^t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\sum_{(i|k)\in A_n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{R > e^{t-V_{i|k}}} - \sum_{j=1}^{N_{i|k}} \mathbb{1}_{C_{(i|k,j)}R > e^{t-V_{i|k}}} \middle| \mathcal{F}_k\right]\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{(i|n)\in A_n} \mathbb{1}_{\Pi_{i|n}R > e^t}\right]. \tag{3.30}$$

De là, prenons des notations similaires à celles que nous avions dans les preuves précédentes, à savoir :

$$\nu_n(dt) := \sum_{k=0}^{n} \mu_k(dt), \tag{3.31}$$

$$g(t) := e^{\kappa t}\left(\mathbb{P}(R > e^t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{C_j R > e^t}\right]\right), \tag{3.32}$$

$$r(t) := e^{\kappa t}\mathbb{P}(R > e^t), \tag{3.33}$$

$$\delta_n(t) := e^{\kappa t}\mathbb{E}\left[\sum_{(i|n)\in A_n} \mathbb{1}_{\Pi_{i|n}R > e^t}\right]. \tag{3.34}$$

Nous avons donc, en utilisant l'indépendance des variables considérées vis-à-vis de la tribu $\mathcal{F}_k$, la relation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, r(t) = g * \nu_{n-1}(t) + \delta_n(t). \tag{3.35}$$

Utilisant la transformation régularisante habituelle, nous obtenons

$$\check{r} = \check{g} * \nu_{n-1} + \check{\delta}_n. \tag{3.36}$$

Les mêmes arguments que dans la preuve de Goldie permettent de conclure que $\check{g} * \nu_{n-1}(t) \to \check{g} * \nu(t)$ où $\nu(dt) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{*k}(dt)$ est bien définie par le lemme 3.1.
Il nous reste donc à voir que $\check{\delta}_n(t)$ tend bien vers 0.

Par des arguments de convexité, les hypothèses du théorème nous permettent d'affirmer qu'il existe un $\beta \in]0, \kappa[$ tel que $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^{\beta}\right] < 1$. Prenons donc un tel β.
Nous avons, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\check{\delta}_n(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{u-t} e^{\kappa u} \mathbb{E}\left[\sum_{(i|n)\in A_n} \mathbb{1}_{\Pi_{i|n} R > e^u}\right] du \\
&\leq e^{(\kappa-\beta)t} \mathbb{E}\left[\sum_{(i|n)\in A_n} \int_{-\infty}^{t} e^{\beta u} \mathbb{1}_{\Pi_{i|n} R > e^u}\right] \\
&\leq e^{(\kappa-\beta)t} \mathbb{E}\left[\sum_{(i|n)\in A_n} \int_{-\infty}^{\min(t, \log(\Pi_{i|n} R))} e^{\beta u}\right] \\
&\leq \frac{e^{(\kappa-\beta)t}}{\beta} \mathbb{E}\left[\sum_{(i|n)\in A_n} (\Pi_{i|n} R)^{\beta}\right].
\end{aligned}$$

Or l'indépendance des variables en jeu nous permet d'écrire

$$\mathbb{E}\left[\sum_{(i|n)\in A_n} (\Pi_{i|n} R)^{\beta}\right] = \mathbb{E}[R^{\beta}] \mathbb{E}\left[\sum_{(i|n)\in A_n} \Pi_{i|n}^{\beta}\right]. \tag{3.37}$$

La première de ces espérances est finie par hypothèse. Montrons que la deuxième converge vers 0 quand $n \to \infty$. En conditionnant par $\mathcal{F}_{n-1}$et en utilisant l'indépendance des $C_{(i|n-1,j)}$ avec les $\Pi_{i|n-1}$, puis en itérant autant que nécessaire, nous avons que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{(i|n)\in A_n} \Pi_{i|n}^{\beta}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^{\beta}\right] \mathbb{E}\left[\sum_{(i|n-1)\in A_{n-1}} \Pi_{i|n-1}^{\beta}\right] = \left(\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^{\beta}\right]\right)^n. \tag{3.38}$$

Or β a été judicieusement choisi pour que $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^{\beta}\right] < 1$, d'où la convergence vers 0.
Ainsi pour tout t, $\check{\delta}_n(t) \to 0$.
Finalement,

$$\check{r}(t) = \check{g} * \nu(t). \tag{3.39}$$

Or nous savons que $\check{g}$ a le bon goût d'être directement Riemann-intégrable : il nous suffit donc d'appliquer le théorème fondamental du renouvellement (théorème 1.3) pour obtenir l'existence de H.
Obtenir les expressions explicites de H avec les espérances est un rapide calcul utilisant le théorème de Fubini. Ceci achève la preuve. □

Preuve du théorème 3.3.
Le principe de cette preuve est assez similaire à celle correspondante dans les travaux

de Goldie : nous allons chercher à vérifier les hypothèses du théorème général 3.2 pour l'appliquer quand R est solution de l'équation de point fixe qui nous intéresse. Ceci nous donnera la convergence souhaitée, les expressions de H se calculant là encore par théorème de Fubini (les termes considérés étant presque sûrement absolument intégrables, pour plus de détails à ce sujet, voir la fin de la preuve du théorème 4.1 dans [9]).

Le lemme 4.4 de [9] nous permet d'obtenir que pour tout $\beta \in]0, \kappa[$, $\mathbb{E}[R^\beta] < \infty$. Il nous reste à montrer l'existence d'un $\gamma \in [0, \kappa[$ tel que $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1} NC_j^\gamma\right] < \infty$ afin de vérifier les premières hypothèses du théorème 3.2, nous laissant seulement à vérifier par la suite la condition intégrale (3.5).
Pour des raisons de convexité, une dichotomie s'impose concernant les valeurs prises par κ. En effet, si $\kappa > 1$, l'inégalité de Jensen couplée à l'hypothèse $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N C_i^\kappa] = 1$ nous permet de prendre n'importe quel $\gamma \in [1, \kappa[$.
Il nous faut détailler plus avant pour le cas où $\kappa \in]0, 1]$. Pour ce faire, posons $\gamma := \kappa \frac{1+\epsilon/2}{1+\epsilon} < \kappa$. Il vient alors, en appliquant deux fois la convexité,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\gamma\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^N C_j^{\kappa/(1+\epsilon)}\right)^{1+\epsilon/2}\right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^N C_j^{\kappa/(1+\epsilon)}\right)^{1+\epsilon}\right]\right)^{\frac{1+\epsilon/2}{1+\epsilon}},\end{aligned}$$

et ce dernier terme est fini par définition de ϵ.

Reste donc à vérifier que $\int_0^\infty \left|\mathbb{P}(R > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{C_j R > t}\right]\right| t^{\kappa-1} dt < \infty$.
Pour ce faire, définissons $R^* := \sum_{i=1}^N C_i R_i + Q \overset{loi}{=} R$. Nous avons

$$\left|\mathbb{P}(R > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{C_j R > t}\right]\right| \leq \left|\mathbb{P}(R > t) - \mathbb{P}\left(\bigvee_{j=1}^N C_j R_j > t\right)\right| \tag{3.40}$$

$$+ \left|\mathbb{P}\left(\bigvee_{j=1}^N C_j R_j > t\right) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{C_j R > t}\right]\right|. \tag{3.41}$$

Or $R \overset{loi}{=} R^*$ et $R^* \geq \bigvee_{i=1}^N C_i R_i$, donc le premier terme du membre de droite s'écrit sans les valeurs absolues et le second terme n'est autre que $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{C_j R > t}\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\bigvee C_i R_i > t}\right]$.
La finitude de ce second terme est assurée par le lemme 4.6 de [9] de manière évidente pour $\kappa \leq 1$ et en prenant un $\epsilon > 0$ tel que $\frac{\kappa}{1+\epsilon} \leq 1$ quand $\kappa > 1$ car nous avons l'inégalité $\sum x_i^{\frac{\kappa}{1+\epsilon}} \leq (\sum x_i)^{\frac{\kappa}{1+\epsilon}}$.

Regardons maintenant l'intégrale contre $t^{\kappa-1}dt$ de ce premier terme. Le théorème de Fubini-Tonelli nous donne que

$$\int_0^\infty \left(\mathbb{P}(R > t) - \mathbb{P}\left(\bigvee_{j=1}^N C_j R_j > t \right) \right) t^{\kappa-1} dt = \frac{1}{\kappa} \mathbb{E}\left[(R^*)^\kappa - \left(\bigvee_{j=1}^N C_j R_j \right)^\kappa \right] \quad (3.42)$$

Si $0 < \kappa \leq 1$, nous avons

$$\frac{1}{\kappa} \mathbb{E}\left[(R^*)^\kappa - \left(\bigvee_{j=1}^N C_j R_j \right)^\kappa \right] \leq \frac{1}{\kappa} \mathbb{E}\left[Q^\kappa + \sum_{j=1}^N (C_j R_j)^\kappa - \left(\bigvee_{j=1}^N C_j R_j \right)^\kappa \right] \quad (3.43)$$

ceci étant fini par le lemme 4.6 de [9] et le fait que $\mathbb{E}[Q^\kappa] < \infty$.
Si $\kappa > 1$, les lemmes 4.6 et 4.7 de [9] permettent de conclure à la finitude de l'intégrale.
Dans tous les cas, nous pouvons appliquer le théorème 3.2 ce qui achève la preuve. $\square$

Preuve du théorème 3.5.
Posons $\phi(\theta) := \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\theta\right]$. Il est clair que ϕ est convexe sur $[1, \kappa]$. Valant 1 aux extrémités de ce segment, elle y est donc finie et par continuité sous l'espérance est continue sur ce segment. Par théorème de dérivation sous l'espérance, on obtient aussi que ϕ est deux fois dérivable sur $]1, \kappa[$ et en particulier

$$\forall \theta \in]0, \kappa[, \phi''(\theta) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\theta (\log(C_j))^2 \right]. \quad (3.44)$$

Comme $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j\right] = 1$, on a $\mathbb{P}(C_j \equiv 0, j \in [\![1, N]\!]) < 1$. De plus, la non-arithméticité nous donne $\mathbb{P}(C_j \in \{0, 1\}, j \in [\![1, N]\!]) < 1$ et de là, on a $\phi'' > 0$. En cumulant cela avec le théorème de Rolle appliqué à ϕ, nous savons qu'il existe $1 < \theta_1 < \theta_2 < \kappa$ tels que $\phi'(\theta_1) < 0 < \phi'(\theta_2)$.
ϕ' étant strictement croissante, par convergence monotone, nous avons

$$\phi'(1+) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j \log(C_j) \right] < 0. \quad (3.45)$$

D'autre part, comme $x \log^+(x) \leq c(1 + x^\kappa)$ (où $c > 0$) et $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^N C_j\right)^\kappa\right] < \infty$, nous obtenons que $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1} NC_j\right) \log^+ \left(\sum_{j=1}^N C_j\right)\right] < \infty$. Ainsi, en appliquant le théorème 2 de [13], nous obtenons que W_n converge p.s. vers une solution R telle que $\mathbb{E}[R] = 1$.
Nous allons vouloir appliquer le théorème 3.2 à notre solution R. Les hypothèses de moments sur les C_j combinées à $\mathbb{E}[R] = 1$ nous donne que $\mathbb{E}[R^\kappa] < \infty$. La stricte convexité de ϕ et le théorème 2.1 de [13] nous donne que $\forall \beta \in]0, \kappa[, \mathbb{E}[R^\beta] < \infty$.

D'autre part, en utilisant de nouveau que ϕ' est strictement croissante, par convergence monotone,

$$0 < \phi'(\kappa-) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^\kappa \log(C_j)\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^\kappa \log^+(C_j)\right] < \infty. \tag{3.46}$$

A partir de là, on peut suivre la preuve du théorème 3.3 en mettant $Q \equiv 0$.

Enfin, il faut montrer que $\mathbb{P}(\tilde{N} \geq 2) > 0 \implies H > 0$.
Supposons donc que $\mathbb{P}(\tilde{N} \geq 2) > 0$. Alors il existe $1 \leq n \leq \infty$ et $1 \leq i_1 < i_2 < n+1$ tels que $\mathbb{P}(N = n, C_{i_1} > 0, C_{i_2} > 0) > 0$. En fait, on peut même dire qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $\mathbb{P}(N \geq i_2, C_{i_1} > \delta, C_{i_2} > \delta) > 0$.
Nous utilisons ensuite deux inégalités déterministes s'obtenant via des études fonctionnelles classiques :

$\forall x, y \geq 0, \forall \kappa > 1,$

$$(x_1 + x_2)^\kappa \geq x_1^\kappa + x_2^\kappa, \tag{3.47}$$

et $\forall 0 < \epsilon < \kappa - 1, \forall 0 < c < 2^{\kappa-1-\epsilon} - 1, \forall x \in [0, 1],$

$$(1 + x)^\kappa - 1 - x^\kappa - cx^{\kappa-\epsilon} \geq 0. \tag{3.48}$$

De cette seconde inégalité, nous pouvons déduire que pour $x_1, x_2 \geq 0$, nous avons

$$(x_1 + x_2)^\kappa - x_1^\kappa - x_2^\kappa \geq c(x_1 \wedge x_2)^\kappa. \tag{3.49}$$

Partant de la seconde expression de H donnée par le théorème et appliquant (3.47), nous obtenons que

$$H \geq \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{N \geq i_2}\left((C_{i_1}R_{i_1} + C_{i_2}R_{i_2})^\kappa - (C_{i_1}R_{i_1})^\kappa - (C_{i_2}R_{i_2})^\kappa\right)\right]}{\kappa\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^\kappa \log(C_j)\right]}. \tag{3.50}$$

En appliquant maintenant (3.49), nous avons alors

$$\begin{aligned} H &\geq \frac{c\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{N \geq i_2}(C_{i_1}R_{i_1} \wedge C_{i_2}R_{i_2})^\kappa\right]}{\kappa\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^\kappa \log(C_j)\right]} \\ &\geq \frac{c\delta^\kappa \mathbb{P}(N \geq i_2, C_{i_1} > \delta, C_{i_2} > \delta)\mathbb{E}[(R_{i_1} \wedge R_{i_2})^\kappa]}{\kappa\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^\kappa \log(C_j)\right]} \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Application à la marche aléatoire branchante

Nous renvoyons le lecteur aux notes de Saint-Flour de Shi [14] pour toute information complémentaire sur la définition de la MAB.

Notons $\mathcal{U}$ l'arbre d'Ulam. Considérons une marche aléatoire branchante $(X_u)_{u\in\mathcal{U}}$, d'incréments $(\xi_u)_{u\in\mathcal{U}}$ de sorte que $X_u = \xi_{u_1} + \xi_{u_1u_2} + ... + \xi_u$ (où u_1u_2 est à comprendre au sens de la concaténation). μ désignera la loi définie par $\mu(A) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_i\in A}\right]$. Pour simplifier les écritures, nous écrirons $X_u = \partial$ si la marche s'est éteinte à partir d'un ancêtre de u et les termes correspondants compterons pour 0 dans les sommes effectuées sur des générations entières. Posons $\forall\theta, \varphi(\theta) := \log \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\infty} e^{\theta X_i}]$ et

$$W_n^{(\theta)} = \sum_{|u|=n} e^{\theta X_u - n\varphi(\theta)}.$$

La propriété de branchement assure que $W_n^{(\theta)}$ est une martingale. Celle-ci est positive : elle converge donc presque sûrement vers une limite $W = W_\infty^{(\theta)}$ (on va supposer θ fixé à l'intérieur du domaine de définition de φ dans toute la suite).

Ce W est une variable aléatoire d'intérêt pour l'étude fine de la marche aléatoire branchante. Par exemple, nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.1 (Croissance de la MAB dans une direction donnée, Biggins)**.** *Supposons qu'il existe $\kappa > 1$ tel que $W_1^{(\theta)} \in L^\kappa$ et $\varphi(\kappa\theta) < \kappa\varphi(\theta)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, $x_\theta = \varphi'(\theta)$ et $\sigma_\theta^2 = \int_{\mathbb{R}} (y - x_\theta) e^{\theta y - \varphi(\theta)} \mu(dy)$. Alors*

$$e^{-n\varphi(\theta)} \sum_{|u|=n} e^{\theta X_u} f\left(\frac{X_u - x_\theta n}{\sqrt{\sigma_\theta^2 n}}\right) \overset{loi}{\to} W\mathbb{E}[f(\mathcal{N})], \tag{4.1}$$

où $\mathcal{N}$ est une variable gaussienne centrée réduite.

W intervient donc de manière cruciale dans le comportement asymptotique de la marche aléatoire branchante, pour peu que les bonnes hypothèses soient vérifiées. Nous serions donc ravis de voir W vérifier une des équations de point fixe étudiées plus haut, afin de mieux comprendre son comportement et donc, mieux comprendre le comportement de la MAB.

De nouveau grâce à la propriété de branchement, nous obtenons que W vérifie une équation de point fixe :

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\theta X_i - \varphi(\theta)} W_i \tag{4.2}$$

où les W_i sont des copies iid de W (c'est l'équation (2) promise depuis le début).

4.1 Une première approche par les arbres pondérés

Nous désignons par $L^p(\mathbb{P})$ l'espace des variables aléatoires admettant un moment d'ordre $p > 0$ fini sous la probabilité $\mathbb{P}$. S'il n'y a pas d'ambigüités sur la probabilité considérée, nous noterons simplement L^p.
Pour se rapprocher des notations utilisées dans la résolution de ces équations, notons

$$C_i = e^{\theta X_i - \varphi(\theta)}. \tag{4.3}$$

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\infty} C_i] = 1$. C'est un premier pas vers l'utilisation du théorème 3.5 avec $N = \infty$ p.s..
Par ailleurs, les C_i sont tous strictement positifs (dès que θ est dans le domaine de définition de φ) donc $\forall i \geq 1, \mathbb{P}(N \geq i, C_i > 0) = 1 > 0$. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat dans le cadre de la marche aléatoire branchante :

Théorème 4.2 (Queue de W)**.** *Supposons que la loi de reproduction de la MAB soit non-arithmétique. Supposons de plus qu'il existe $\kappa > 1$ tel que*

$$W_1^{(\theta)} \in L^{\kappa}, \tag{4.4}$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\kappa} \log^+(C_i)\right] < \infty, \tag{4.5}$$

$$\varphi(\kappa\theta) = \kappa\varphi(\theta) \tag{4.6}$$

Alors

$$\mathbb{P}(W > t) \sim Ht^{-\kappa}(t \to \infty), \tag{4.7}$$

où $H \in]0, \infty[$ est donnée par

$$H = \frac{\int_0^\infty v^{\kappa-1} \left(\mathbb{P}(W > v) - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^\infty \mathbb{1}_{e^{\theta X_i - \varphi(\theta)} W > v} \right] \right) dv}{\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^\infty e^{\theta\kappa X_i - \varphi(\kappa\theta)} \log\left(e^{\theta X_i - \varphi(\theta)} \right) \right]} \tag{4.8}$$

$$= \frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^\infty e^{\theta X_i - \varphi(\theta)} W_i \right)^\kappa - \sum_{i=1}^\infty e^{\kappa\theta X_i - \varphi(\kappa\theta)} W_i^\kappa \right]}{\kappa \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^\infty e^{\theta\kappa X_i - \varphi(\kappa\theta)} \log\left(e^{\theta X_i - \varphi(\theta)} \right) \right]} \tag{4.9}$$

Remarque. *Un calibrage de $\kappa > 1$ pourra être nécessaire si l'on veut coupler l'utilisation de ce résultat avec le théorème 4.1. L'un demandant d'avoir $\varphi(\kappa\theta) = \kappa\varphi(\theta)$ et l'autre demandant $\varphi(\kappa\theta) < \kappa\varphi(\theta)$. Ceci dit, les propriétés de régularité de φ (notamment par des arguments de convexité) rendent ce calibrage possible, sauf éventuellement dans certains cas pathologiques.*

Preuve du théorème 4.2. Pour obtenir l'existence de H, il nous suffit de vérifier la totalité des hypothèses du théorème 3.5.
Nous savons que $\varphi(\kappa\theta) = \kappa\varphi(\theta)$, donc nous pouvons écrire que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^\infty C_i^\kappa \right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^\infty e^{\kappa\theta X_i - \kappa\varphi(\theta)} \right] \tag{4.10}$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^\infty e^{\kappa\theta X_i - \varphi(\kappa\theta)} \right]. \tag{4.11}$$

Or par définition, $\varphi(\kappa\theta) = \log \mathbb{E}[\sum_{i=1}^\infty e^{\kappa\theta X_i}]$, donc le dernier terme de cette suite d'égalités vaut 1. L'hypothèse (3.26) est donc vérifiée.
Il est clair que l'hypothèse (3.25) est vérifiée et il suffit de réécrire $W_1^{(\theta)}$ en terme des C_i pour voir que (3.24) est vérifiée.
Nous sommes donc en mesure d'appliquer le théorème 3.5 afin d'obtenir l'asymptotique souhaitée.
Les expressions de H s'obtiennent alors directement en remplaçant les C_i par leur expression en termes de quantités d'intérêts pour la MAB.
Enfin, la constante H est strictement positive en vertu du dernier point du théorème 3.5 : en effet, ici les $C_i = e^{\theta X_i - \varphi(\theta)}$ sont strictement positifs presque sûrement donc l'implication est trivialement vérifiée, $\tilde{N}$ valant $+\infty$ presque sûrement. Ceci achève la preuve. □

4.2 Une seconde approche par réduction de l'équation

Nous suivons ici des éléments de [13]. Nous voudrions trouver une manière d'aboutir au théorème 4.2 sans utiliser les résultats mis en place par Jelenković et Olvera-Cravioto mais en se contenant des résultats obtenus pour l'équation affine $R \overset{loi}{=} MR + Q$. Liu abouti dans [13] à un résultat de convergence $\mathbb{P}(W > t) \sim Ht^{-\kappa} (t \to \infty)$ (sans expliciter la constante H) en se ramenant à l'équation affine. Nous allons donc voir comment s'y ramener et en profiter pour expliciter tant que possible la constante obtenue via cette méthode.

Commençons par prendre quelques notations supplémentaires tout en conservant celles déjà établies dans la précédente section. Nous posons

$$Y_{\emptyset} = 1 \tag{4.12}$$
$$\forall u \in \mathcal{U}, Y_u = e^{\theta X_u - |u|\varphi(\theta)} = C_{u_1} C_{u_1 u_2} ... C_u \tag{4.13}$$

où $C_u = e^{\theta \xi_u - \varphi(\theta)}$. Nous gardons là-encore la convention que si la marche prend la valeur ∂ sur un noeud, les termes correspondants s'annulent (Liu ne fait pas cette hypothèse car il se place directement sur l'arbre aléatoire $T(\omega)$ sur lequel vit la MAB plutôt que $\mathcal{U}$ tout entier).
Avec ces notations, nous avons $W_n^{(\theta)} = \sum_{|u|=n} Y_u$. Au même titre que les W_n convergent presque sûrement vers W, nous avons pour tout u l'existence presque sûre de la limite

$$W_u := \lim_{n\to\infty} \sum_{|v|=n} C_{uv_1} C_{uv_1 v_2} ... C_{uv}. \tag{4.14}$$

On remarquera que $W_{\emptyset} = W$.

Maintenant, définissons pour tout $u \in \partial\mathcal{U}$, le bord de l'arbre d'Ulam constitué des mots de longueur infinie,

$$\tilde{W}(\omega, u) := W_{\emptyset}(\omega) = W(\omega), \tag{4.15}$$
$$\tilde{C}_1(\omega, u) := C_{u_1}(\omega), \tag{4.16}$$
$$\tilde{W}_1(\omega, u) := W_{u_1}(\omega). \tag{4.17}$$

Ce sont des applications mesurables définies sur $\Omega \times \partial\mathcal{U}$ muni de la tribu produit $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\partial\mathcal{U})$ où $\mathcal{B}(\partial\mathcal{U})$ désigne la tribu borélienne de $\partial\mathcal{U}$ (pour la métrique sur $\partial\mathcal{U}$ utilisée par Liu [13]).

Toutes ces définitions nous donne l'égalité suivante

$$\tilde{W}(\omega, u) = \tilde{C}_1(\omega, u)\tilde{W}_1(\omega, u) + \tilde{B}_1(\omega, u) \tag{4.18}$$

où $\tilde{B}_1(\omega, u) := \sum_{j=1}^{\infty} C_j W_j \mathbb{1}_{u_1 \neq j}$.

Introduisons Q la mesure de Peyrière sur $\Omega \times \partial\mathcal{U}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\partial\mathcal{U}), Q(A) = \mathbb{E}\left[\int_{\partial\mathcal{U}} \mathbb{1}_A(\omega, u)\mu_\omega(du)\right] \tag{4.19}$$

où μ_ω est l'unique mesure de Borel (aléatoire) sur $\partial T(\omega)$ (bord de l'arbre engendré par la MAB) telle que $\mu_\omega(\{v \in \partial T(\omega) : u \leq v\}) = Y_u W_u$, prolongée à $\partial\mathcal{U}$ par restriction à

$\partial T(\omega)$.
Comme $\mathbb{E}[W] = 1$, Q est une probabilité. Nous noterons $\mathbb{E}_Q[.]$ les espérances prises par rapport à cette nouvelle probabilité.
Usant des formules fournies par le lemme 4.1 de [13] et sous réserve de vérifier les hypothèses du théorème 4.2, nous avons que

$$\mathbb{E}_Q\left[\tilde{C}_1^{\kappa-1}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\kappa}\right] = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_Q\left[\tilde{C}_1^{\kappa-1}\log^+(\tilde{C}_1)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\kappa}\log^+(C_i)\right] < \infty. \tag{4.20}$$

Ceci implique que $W \in L^{\kappa-1}(\mathbb{P})$ et $\tilde{B}_1 \in L^{\kappa-1}(Q)$. Alors le théorème 2.5 peut s'appliquer pour donner le résultat suivant

Théorème 4.3. *Sous les hypothèses du théorème* 4.2*,*

$$Q(\tilde{W} > t)t^{\kappa-1} \sim \frac{\mathbb{E}_Q\left[(\tilde{B}_1 + \tilde{C}_1\tilde{W}_1)^{\kappa-1} - (\tilde{C}_1\tilde{W}_1)^{\kappa-1}\right]}{(\kappa-1)\mathbb{E}_Q\left[\tilde{C}_1^{\kappa-1}\log(\tilde{C}_1)\right]}(t \to \infty) \tag{4.21}$$

Le lemme 4.3(i) de [13] permet alors de trouver l'asymptotique de la queue de W sous la probabilité $\mathbb{P}$ de départ :

Théorème 4.4. *Sous les hypothèses du théorème* 4.2

$$\mathbb{P}(W > t)t^{\kappa} \sim d\frac{\kappa-1}{\kappa}(t \to \infty) \tag{4.22}$$

où

$$d = \frac{\mathbb{E}_Q\left[(\tilde{B}_1 + \tilde{C}_1\tilde{W}_1)^{\kappa-1} - (\tilde{C}_1\tilde{W}_1)^{\kappa-1}\right]}{(\kappa-1)\mathbb{E}_Q\left[\tilde{C}_1^{\kappa-1}\log(\tilde{C}_1)\right]} \in [0, \infty[\tag{4.23}$$

4.3 Discussion sur les deux approches

Avec les mêmes hypothèses, les théorèmes 4.2 et 4.4 aboutissent à deux expressions de la constante H quelque peu différentes. Fort heureusement, nous pouvons vérifier que l'expression obtenue en suivant la méthode de réduction de Liu est la même que si l'on applique le théorème de Jelenković et Olvera-Cravioto. Pour ce faire, énonçons les règles de calcul du lemme 4.1 de [13].

Lemme 4.5. *$\tilde{W}_1$ est Q-indépendant de $(\tilde{C}_1, \tilde{B}_1)$ et a la loi de $\tilde{W}$. De plus, pour toute fonctions* *boréliennes positives f, g définies sur $\mathbb{R}$ et h définie sur $\mathbb{R}^2$, nous avons*

$$\mathbb{E}_Q\left[f(\tilde{C}_1)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} f(C_i)C_i\right], \tag{4.24}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[f(\tilde{B}_1)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} C_k f\left(\sum_{1\le i\ne k\le N} C_i W_i\right)\right], \tag{4.25}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[h(\tilde{C}_1, \tilde{B}_1)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} C_k h\left(C_k, \sum_{1\le i\ne k\le N} C_i W_i\right)\right], \tag{4.26}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[g(\tilde{W}_1)\right] = \mathbb{E}\left[g(W)W\right] = \mathbb{E}_Q\left[g(\tilde{W})\right]. \tag{4.27}$$

Nous sommes alors en mesure de faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\mathbb{E}_Q\left[(\tilde{B}_1 + \tilde{C}_1\tilde{W}_1)^{\kappa-1} - (\tilde{C}_1\tilde{W}_1)^{\kappa-1}\right]}{(\kappa-1)\mathbb{E}_Q\left[\tilde{C}_1^{\kappa-1}\log(\tilde{C}_1)\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_Q\left[\tilde{W}^{\kappa-1}\right] - \mathbb{E}_Q\left[(\tilde{C}_1\tilde{W}_1)^{\kappa-1}\right]}{(\kappa-1)\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\kappa}\log(C_i)\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_Q\left[W^{\kappa-1}\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\kappa} W_i^{\kappa}\right]}{(\kappa-1)\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\kappa}\log(C_i)\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[(\sum_{i=1}^{\infty} C_i W_i)^{\kappa} - \sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\kappa} W_i^{\kappa}\right]}{(\kappa-1)\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\kappa}\log(C_i)\right]},
\end{aligned}$$

donc nous avons bien

$$d\frac{\kappa-1}{\kappa} = H. \tag{4.28}$$

Nous voilà rassurés.

Ainsi, réduire l'équation (4.2) à une équation affine fournit tout de même, après quelques calculs supplémentaires, une expression de la constante qui est la même que celle obtenue en travaillant avec l'équation non-modifiée. On peut arguer que cette réduction ne demande pas toute la théorie développée dans le chapitre 3, ceci nécessitant à la place un changement de probabilité certes non-trivial mais qui permet de se ramener à ce qui a été fait dans le chapitre 2. Malheureusement l'expression brute de la constante obtenue par la méthode de réduction n'est pas pratique à manipuler car on ne connait a priori que les moments des C_i et de W sous la probabilité de départ. Jelenković et Olvera-Cravioto indiquent d'ailleurs à juste titre dans [9] que leur constante est plus explicite que celle obtenue par Liu dans [13]. Il est aussi bon de noter que, au même titre que les résultats généraux énoncés par Goldie et Kévei, Jelenković et Olvera-Cravioto donnent des résultats plus généraux que la simple application à la queue des solutions d'équations de point fixe car on ne suppose pas immédiatement que R est solution. De même, l'équation vérifiée par la limite des martingales de la MAB n'est pas la seule équation de point fixe du type décrit par Jelenković et Olvera-Cravioto qui gagnent encore en généralité.

Bibliographie

[1] S. Asmussen, S. Foss & D. Korshunov, "Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour", *J. Theoret. Probab.* 16 (2003), no. 2, 489-518.

[2] K. B. Athreya, D. McDonald & P. Ney, "Limits theorems for semi-Markov processes and renewal theory for Markov chains", 1978, *Ann. Probab.* 6, 788-797.

[3] Buraczewski, D., Damek, E., & Mikosch, T. (2016). Stochastic models with power-law tails : the equation X= AX+ B. Springer.

[4] R. Durrett & T. M. Liggett, "Fixed Points of the Smoothing Transformation", *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 64, 275-301, Springer-Verlag, 1983.

[5] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications 2*, 1971, deuxième édition, Wiley, New-York.

[6] C. M. Goldie, "Implicit Renewal Theory and Tails of Solutions of Random Equations", *The Annals of Applied Probability*, February 1991, Vol 1, No.1, 126-166.

[7] R. Holley, T. M. Liggett, "Generalized Potlach and Smoothing Processes", *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 55, 165-195, (1981).

[8] P. R. Jelenković & M. Olvera-Cravioto, "Implicit Renewal Theorem for Trees with General Weights", October 19, 2011, arXiv :1012.2165v2.

[9] P. R. Jelenković & M. Olvera-Cravioto, "Implicit Renewal Theory and Power Tails on Trees", December 25, 2013, *Applied Probability Trust*.

[10] H. Kesten & R. A. Maller, "Two renewal theorems for general random walks tending to infinity", *Probab. Theory Related Fields* 106 (1996), no. 1, 1-38.

[11] P. Kevei, "A note on the Kesten-Goldie theorem", December 24, 2015, arXiv :1512.07262v1.

[12] P. Kevei, "A note on the Kesten-Grincevičius-Goldie theorem", 2016, *Electronic Communications in Probability* 21 (2016), No. 51, 1-12.

[13] Q. Liu, "On generalized multiplicative cascades", *Stochastic Process. Appl.*, 86 :263-286, 2000.

[14] Shi, Z. (2016). *Branching Random Walks : École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XLII-2012* (Vol. 2151). Springer.

[15] F. Spitzer, "Infinite systems with locally interacting components", *Ann. Probab.* 1981, Vol 9, No 3, 349-364.